

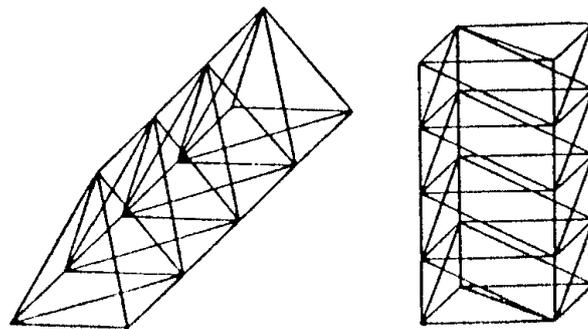
Breve reseña histórica

El desarrollo general de los sistemas tridimensionales se debe al astrónomo alemán Möbius (1837), él demostró que se necesitan $3n - 6$ barras para unir "n" nudos rígidamente mediante articulaciones.

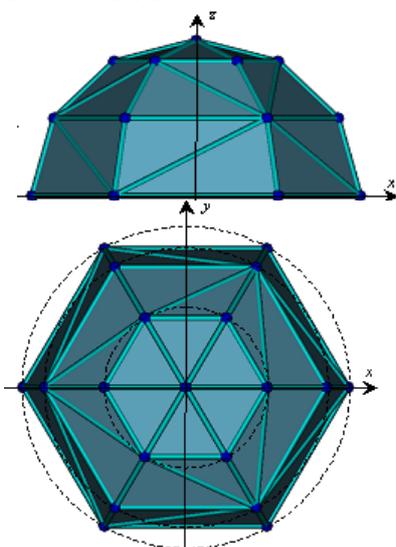
Observo también que ocurren casos excepcionales de estructuras críticas, caracterizados por la anulación del determinante del sistema de ecuaciones representativo del equilibrio de los nudos.

Ofreció, asimismo, un método práctico y útil para decidir si un sistema dado es o no rígido: si para algunas cargas podemos encontrar la sollicitación axial en todas las barras de la estructura sin ninguna ambigüedad, entonces el sistema de ecuaciones antes citado posee determinante no nulo y la estructura es rígida.

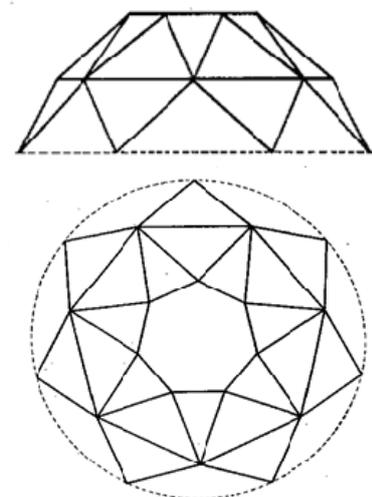
Como consecuencia de lo expuesto en el párrafo anterior, si en una estructura descargada podemos probar que las sollicitaciones de todas las barras son nulas entonces la estructura es rígida. (hipótesis de la carga nula)



Möbius estudia también el importante problema de una estructura espacial contenida en un poliedro convexo y demuestra que si las caras de este poliedro están trianguladas el número de barras es exactamente igual al número de ecuaciones de la estática y la estructura es estáticamente determinada.



Johan Wilhelm **Schwedler** 1823 -1894



August Otto **Föppl** 1854 -1924

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Formación de las Estructuras Espaciales (Estudio geométrico)

Estructuras poliédricas convexas: Son aquellas en las que al unir dos puntos de su superficie mediante una recta, ésta es interior, o a lo sumo se encuentra sobre la superficie del poliedro.

Poliedros regulares: Tetraedro; Cubo; Octaedro; Dodecaedro; Icosaedro.

Cuando se dispone un sistema de barras para constituir una celosía espacial rígida es conveniente, a menudo, por razones constructivas, evitar toda obstrucción en el espacio interior. Observando estructuras espaciales sin diagonales internas (como es usual), puede probarse que si una celosía espacial completa posee la forma de un poliedro cerrado de caras triangulares o subdivididas en triángulos, la estructura será rígida.

Para probarlo se recurre en general al teorema de estereometría de Euler. Este teorema establece la relación entre el número de caras, el de aristas y el de vértices de un poliedro cerrado y se basa en el razonamiento siguiente: partiendo de una cara de forma poligonal cualquiera, nos encontramos inicialmente con igual número de lados y de vértices. Si se agrega a la primera cara una segunda, ambas tendrán un lado y dos vértices comunes. Al añadir una tercera cara, dos de sus lados y tres de sus vértices coincidirán con otros tantos ya existentes de las caras interiores.

En general, pues, la adición de una nueva cara - prescindiendo de la primera - implica agregar una cantidad de aristas igual a la de nuevos vértices más uno. Y, por consiguiente, el número de aquéllas irá creciendo con respecto al de éstos de tal modo que, en todo momento, la diferencia entre unas y otros será igual al número de caras agregadas a la primera. Por lo tanto, se concluye que, a cualquier altura de la construcción, el número de aristas debe ser igual al de vértices más el de caras agregadas (o sea todas, excepto la primera). Esta relación es válida hasta que llegemos a la cara final o de cierre, cuya adición no agrega nuevas aristas ni nuevos vértices, se trata de una segunda cara que escapa a la regla expuesta; en definitiva:

Si llamamos b al número de aristas; n al número de vértices y f al número de caras, tendremos, entonces para el poliedro cerrado la relación: $b = n + f - 2$

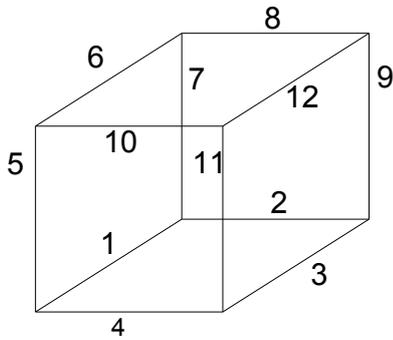
Que expresa el teorema de Euler ya mencionado. Las consideraciones precedentes se aplican al caso general de un poliedro cerrado cualquiera. En el caso particular de que además sus caras estén trianguladas o formadas por triángulos tendremos que siendo cada arista común a dos caras y puesto que todas las caras son triángulos, es decir con tres aristas, se verifica: $b = 3f / 2$

Eliminando f entre las dos ecuaciones obtenemos:

$$b = 3n - 6$$

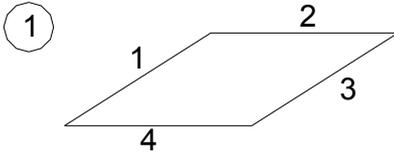
que es la condición necesaria para que cualquier celosía espacial completa sea rígida.

Ejemplo de prisma con caras trianguladas



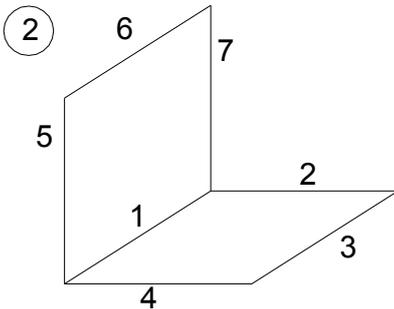
$f = 6$ (caras)
 $n = 8$ (nudos)
 $b = 12$ (barras)

$$b = n + f - 2$$



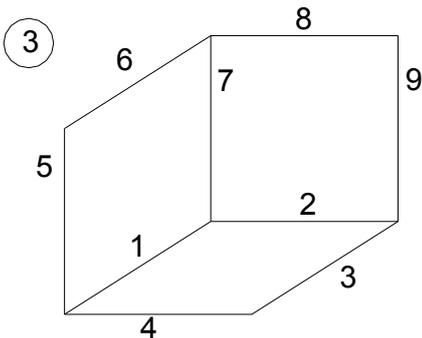
$f = 1$ (caras)
 $n = 4$ (nudos)
 $b = 4$ (barras)

$$b = n + f - 1 \quad 4 = 4 + 1 - 1$$



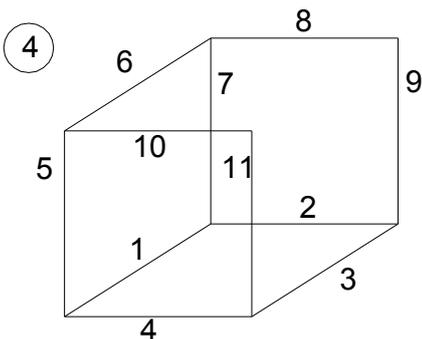
$f = 2$ (caras)
 $n = 6$ (nudos)
 $b = 7$ (barras)

$$b = n + f - 1 \quad 7 = 6 + 2 - 1$$



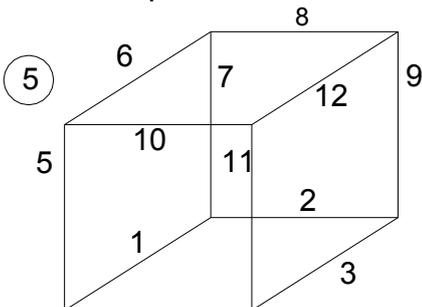
$f = 3$ (caras)
 $n = 7$ (nudos)
 $b = 9$ (barras)

$$b = n + f - 1 \quad 9 = 7 + 3 - 1$$



$f = 4$ (caras)
 $n = 8$ (nudos)
 $b = 11$ (barras)

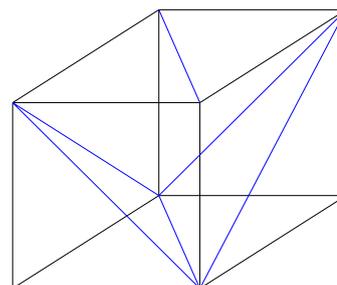
$$b = n + f - 1 \quad 11 = 8 + 4 - 1$$



$f = 6$ (caras)
 $n = 8$ (nudos)
 $b = 12$ (barras)

$$b = n + f - 2$$

$$12 = 8 + 6 - 2$$



$$b = 3 f / 2$$

$$18 = 3 * 12 / 2$$

$$b = n + (2b / 3) - 2 \Rightarrow 3b = 3n + 2b - 6 \Rightarrow$$

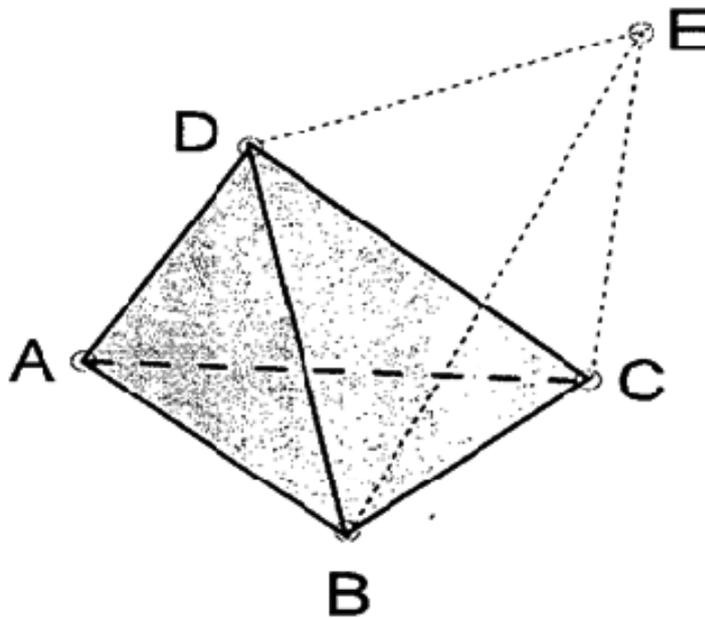
$$b = 3n - 6$$

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Fijación de un nudo en el espacio

AHORA EN 3D.

En el espacio, el volumen elemental (equivalente a la figura triangular en el plano) será el del tetraedro o si se le quiere dar mayor generalidad, el de una pirámide triangular.



Los grados de libertad de movimientos de un nudo cualquiera en el espacio son tres.

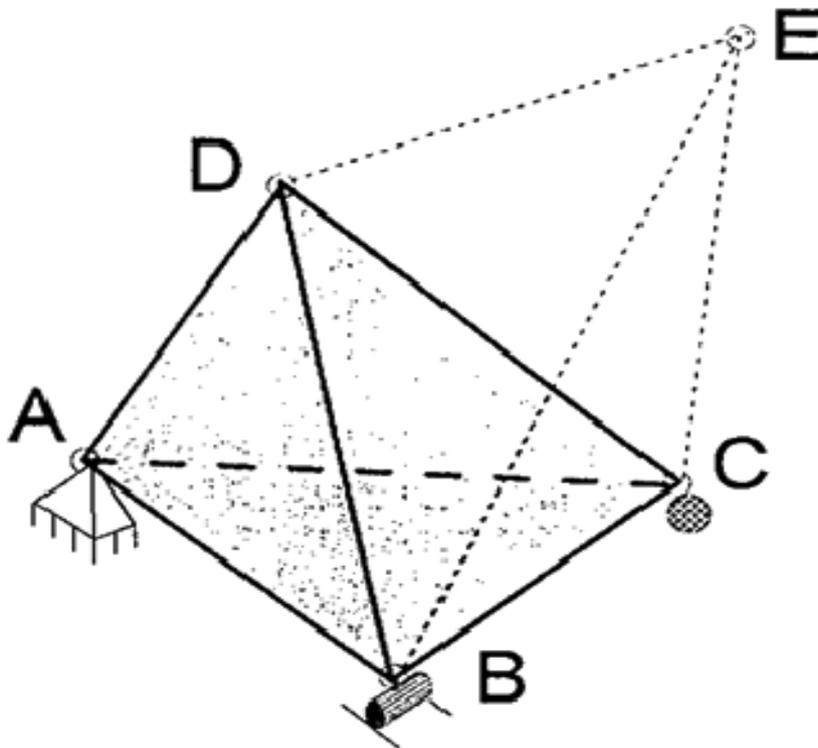
Cada barra que le une o ata a un punto fijo, le anula un grado de libertad.

En consecuencia se han de poner tantas barras como tres veces el número de nudos.

La figura elemental representada en la parte superior, está formada por cinco nudos y nueve barras. Así pues, posee todavía seis grados de libertad.

Estructuras isostáticas en 3D

Una manera de eliminarlos y convertir la figura en una estructura puede ser, por ejemplo, colocar un apoyo fijo en el nudo A (un apoyo fijo le anula los tres posibles movimientos en el plano y da lugar a la aparición de tres reacciones independientes). Colocar un apoyo móvil en una dirección en el apoyo B (un apoyo móvil en una dirección elimina dos de los tres movimientos posibles del nudo B y da lugar a la aparición de dos reacciones independientes) y por último, añadir un apoyo móvil en dos direcciones en el nudo C (un apoyo móvil en dos direcciones elimina uno de los movimientos posibles del nudo C y da lugar a la aparición de una reacción).



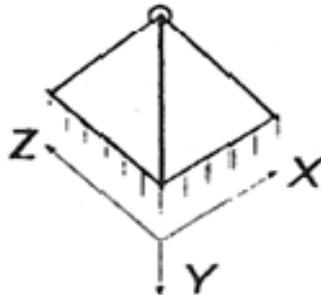
Como el número de movimientos restringidos en los nudos de los apoyos coincide siempre con el número de reacciones en los mismos, podemos afirmar que la condición necesaria para que cualquier estructura articulada espacial sea isostática, es que verifique la fórmula:

$$3 * n - r = b$$

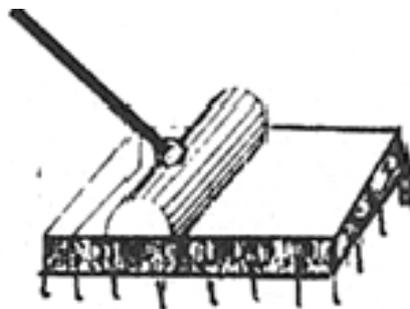
Apoyos en 3D

La tipología de los apoyos se hace ahora más extensa:

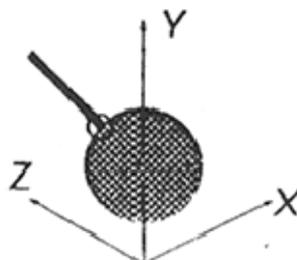
Apoyo fijo o simple - impide el movimiento del nudo de apoyo en las tres direcciones, del espacio, esto es, en las direcciones X , Y , Z . Su representación gráfica es la de una esfera móvil encerrada en otra fija (equivale al apoyo simple del plano).



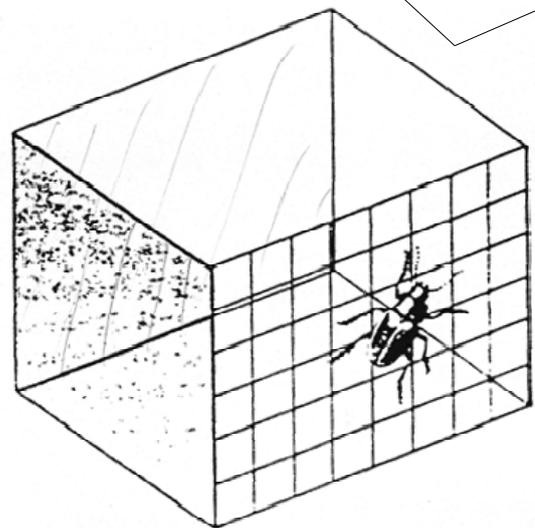
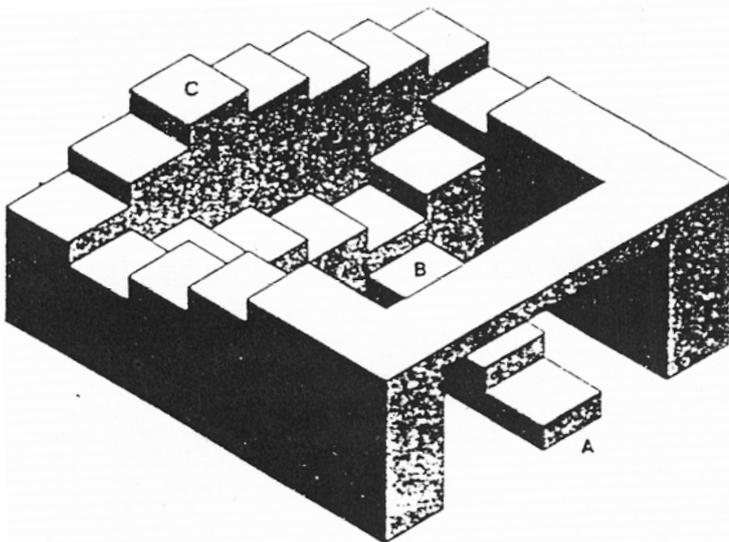
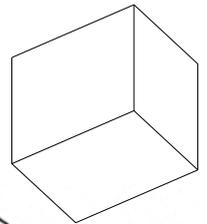
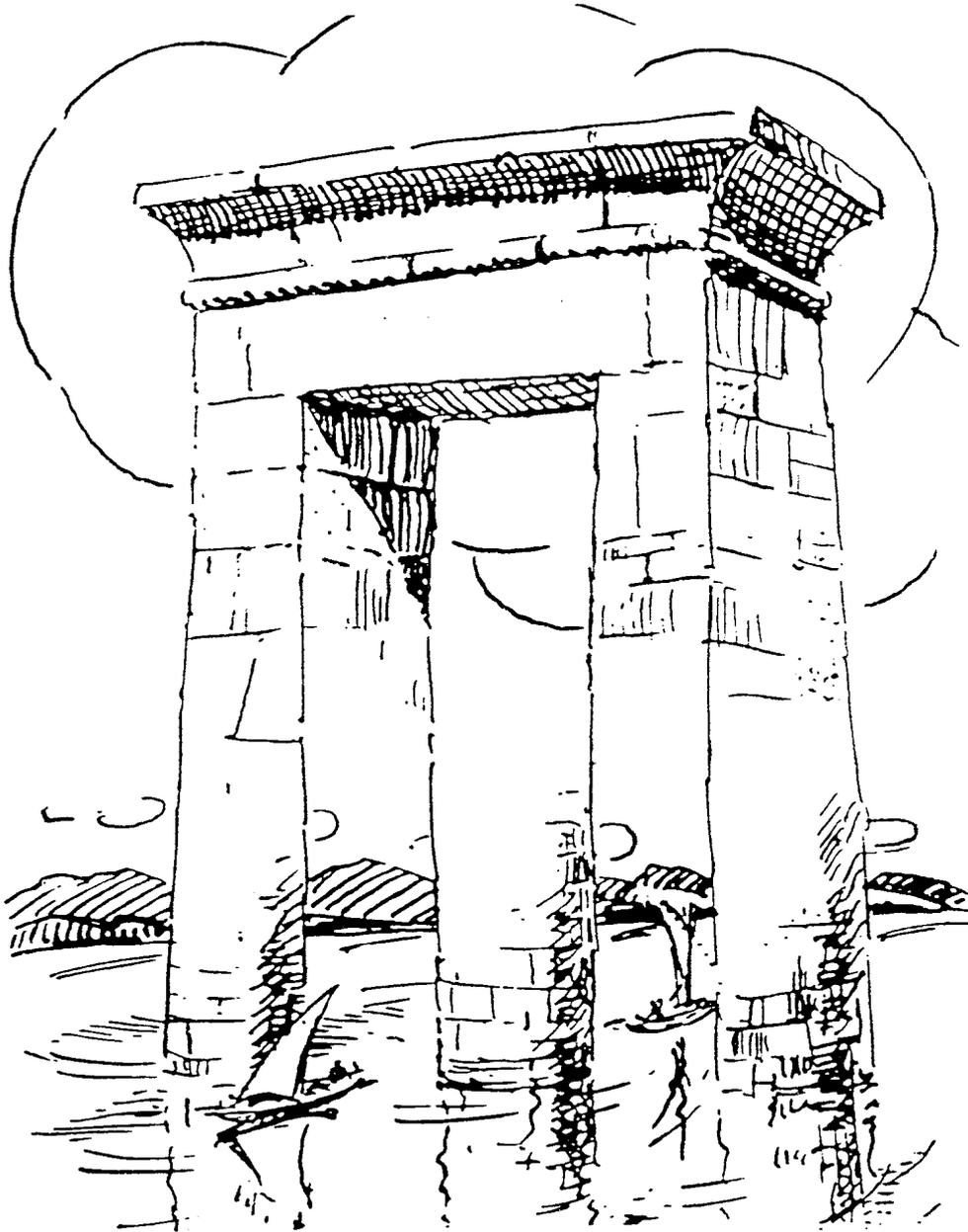
Apoyo móvil en una dirección - impide el movimiento del nudo en dos direcciones, independientes, del espacio, en este ejemplo en las direcciones Y , Z . Su representación gráfica es la de un rodillo dentro de una guía (equivale al apoyo a libre dilatación en el plano).



Apoyo móvil en un plano - impide el movimiento en una sola dirección, la perpendicular al plano de sustentación. En este caso en la dirección Y . Su representación gráfica es la de una esfera apoyada sobre un plano. Este tipo de apoyo es nuevo y no tiene correspondencia con los apoyos en el plano.



3d en representaciones plana, engaños visuales.



Un enigma basado en la escalera de Penrose

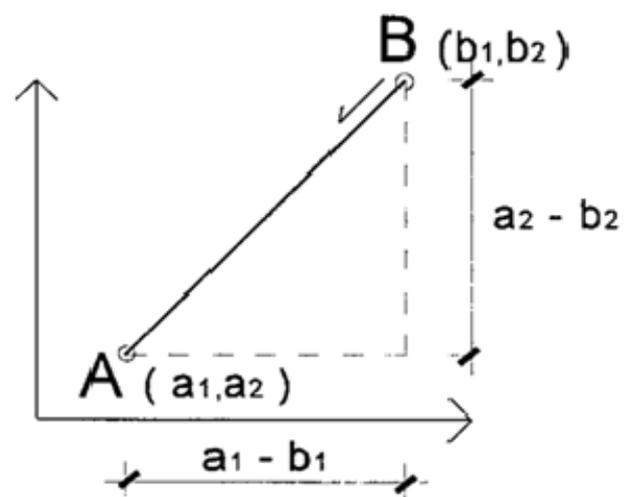
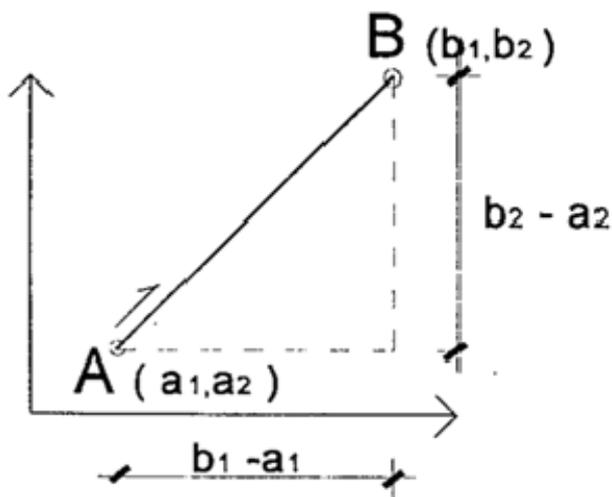
Hay que encerrar al insecto en la jaula

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

LA MATRIZ DE EQUILIBRIO EN EL ORDENADOR.

Para el análisis de cualquier estructura articulada isostática mediante el ordenador, necesitamos conocer:

- Número de nudos.
- Coordenadas cartesianas de los nudos.
- Número de barras.
- Nudos que une cada barra.
- Nudos con movimientos restringidos (condiciones de contorno).



$$L = \sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (b_1 - a_1)^2}$$

$$L = \sqrt{(a_2 - b_2)^2 + (a_1 - b_1)^2}$$

$$L = \sqrt{(2,56)^2 + (1,92)^2} = 3,20 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= (b_1 - a_1) / L \\ \text{sen } \alpha &= (b_2 - a_2) / L \end{aligned}$$

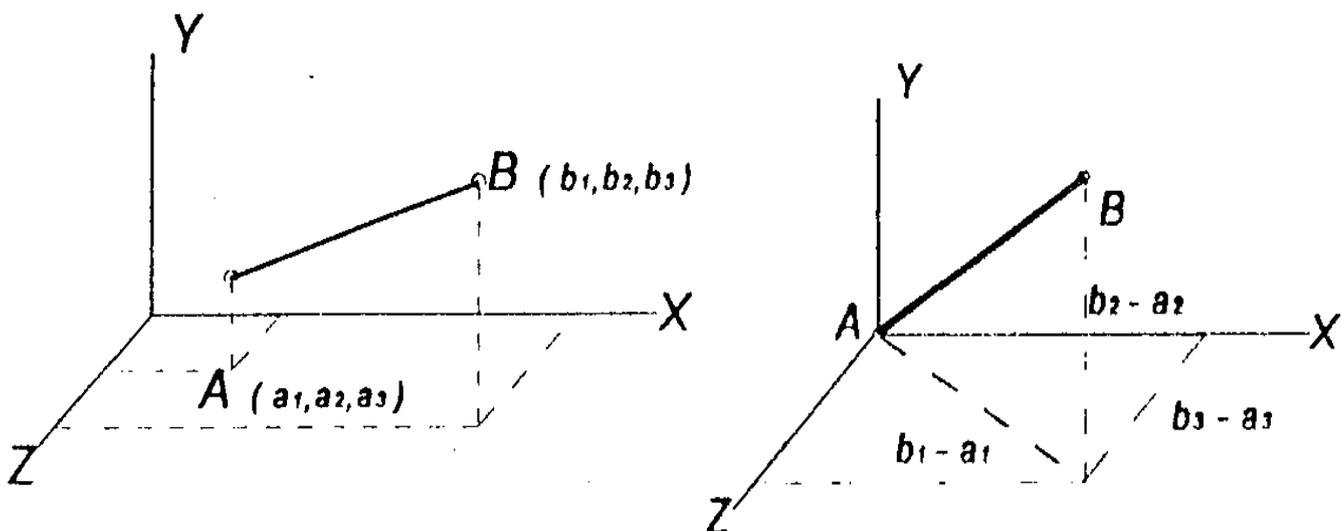
$$\begin{aligned} \cos \alpha + 180^\circ &= (a_1 - b_1) / L \\ \text{sen } \alpha + 180^\circ &= (a_2 - b_2) / L \end{aligned}$$

3D Coordenadas nudos, ángulos y longitudes barras.

- Si se desea realizar el equilibrio sobre un eje general **X** , de un vector **N** de dirección y sentido cualquiera, necesitaremos medir el ángulo α que forma con el sentido positivo del eje **X**. A continuación. calcularemos el valor $\cos \alpha$ y realizaremos la operación : $N * \cos \alpha$.

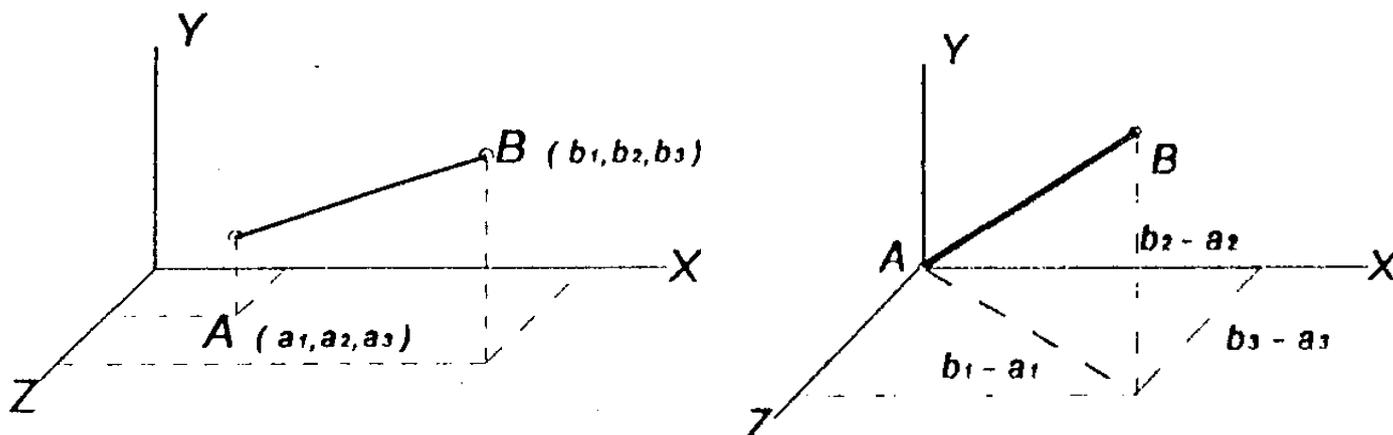
- Si se quiere realizar el equilibrio sobre un eje general **Y** , del mismo vector **N** , necesitaremos medir el ángulo β que forma con el sentido positivo del eje **Y** . A continuación, calcularemos el valor $\cos \beta$ y realizaremos la operación : $N * \cos \beta$.

- Si se quiere realizar el equilibrio sobre un eje general **Z** , del mismo vector **N** , necesitaremos medir el ángulo γ que forma con el correspondiente del eje **Z** . A continuación calcularemos el valor $\cos \gamma$ y realizaremos la operación : $N * \cos \gamma$.



Coeficientes de la matriz de equilibrio en 3D.

* En tres dimensiones, la posición de una barra en el espacio queda totalmente definida por las coordenadas cartesianas de los dos nudos que une.



En el esquema superior se ha representado una barra cualquiera que une los nudos **A** y **B**. Las proyecciones sobre los ejes generales serán:

$$\begin{aligned} \text{Sobre el eje X} &\quad \Rightarrow \quad b_1 - a_1 \\ \text{Sobre el eje Y} &\quad \Rightarrow \quad b_2 - a_2 \\ \text{Sobre el eje Z} &\quad \Rightarrow \quad b_3 - a_3 \end{aligned}$$

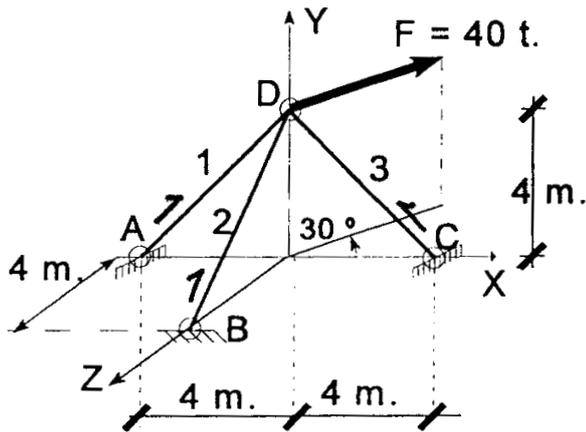
Conocemos de la disciplina de Algebra que la longitud de la barra **A - B** es:

$$L = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Conocida la longitud de la barra **A - B** aplicaremos las mismas fórmulas:

$$\begin{aligned} (b_1 - a_1) / L &= \cos \alpha_A \\ (b_2 - a_2) / L &= \cos \beta_A \\ (b_3 - a_3) / L &= \cos \gamma_A \end{aligned}$$

Matricial en estructura espaciales isostáticas



Coordenadas cartesianas de los nudos

$$\mathbf{A} \Rightarrow (-4; 0; 0)$$

$$\mathbf{B} \Rightarrow (0; 0; 4)$$

$$\mathbf{C} \Rightarrow (4; 0; 0)$$

$$\mathbf{D} \Rightarrow (0; 4; 0)$$

número de barras: $b = 3$

número de nudos: $n = 4$

reacciones apoyos: $r = 9$

$$4 * 3 - 9 = 3 = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{OK}$$

Barra 1 : une el nudo **A** con el **D** , colocando el versor en **A**

$$L = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0} = 4 * \sqrt{2} \text{ m.}$$

$$X_D - X_A = 4 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = 4 / (4 * \sqrt{2}) = \sqrt{2} / 2$$

$$Y_D - Y_A = 4 \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = 4 / (4 * \sqrt{2}) = \sqrt{2} / 2$$

$$Z_D - Z_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \gamma = 0 / (4 * \sqrt{2}) = 0$$

Barra 2 : une el nudo **B** con el **D** , colocando el versor en **B**

$$L = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0} = 4 * \sqrt{2} \text{ m.}$$

$$X_D - X_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = 0 / (4 * \sqrt{2}) = 0$$

$$Y_D - Y_B = 4 \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = 4 / (4 * \sqrt{2}) = \sqrt{2} / 2$$

$$Z_D - Z_B = -4 \quad \Rightarrow \quad \cos \gamma = -4 / (4 * \sqrt{2}) = -\sqrt{2} / 2$$

Barra 3 : une el nudo **C** con el **D** , colocando el versor en **C**

$$L = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0} = 4 * \sqrt{2} \text{ m.}$$

$$X_D - X_C = -4 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = -4 / (4 * \sqrt{2}) = -\sqrt{2} / 2$$

$$Y_D - Y_C = 4 \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = 4 / (4 * \sqrt{2}) = \sqrt{2} / 2$$

$$Z_D - Z_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \gamma = 0 / (4 * \sqrt{2}) = 0$$

Ecuaciones de equilibrio

Nudo

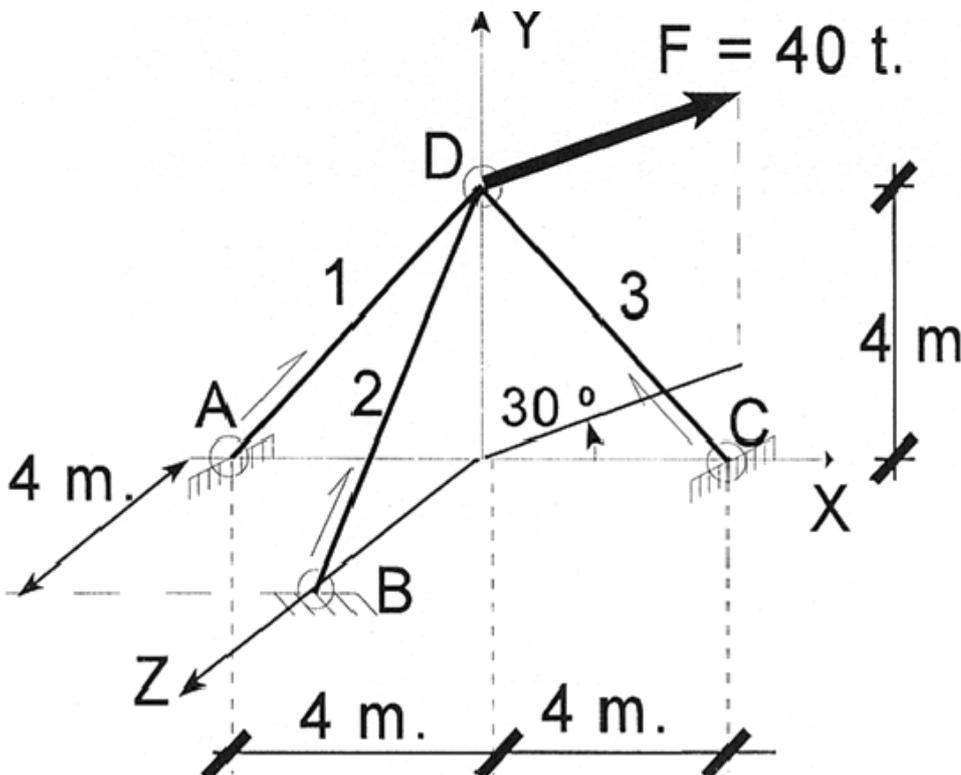
Barra

1 2 3

AXIL (t)

| | | | | | | |
|----------|-----------------|---------------|---------------|---------------|---|-----------------|
| A | R_{AX} | $\sqrt{2}/2$ | | | * | + 10,353 |
| | R_{AY} | $\sqrt{2}/2$ | | | | + 28,284 |
| | R_{AZ} | 0 | | | | - 38,637 |
| B | R_{BX} | | 0 | | | |
| | R_{BY} | | $\sqrt{2}/2$ | | | |
| | R_{BZ} | | $-\sqrt{2}/2$ | | | |
| C | R_{CX} | | | $-\sqrt{2}/2$ | | |
| | R_{CY} | | | $\sqrt{2}/2$ | | |
| | R_{CZ} | | | 0 | | |
| D | - 34,641 | $-\sqrt{2}/2$ | 0 | $\sqrt{2}/2$ | | |
| | 0 | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | | |
| | + 20,000 | 0 | $\sqrt{2}/2$ | 0 | | |

$|E| = -0,70$



Nota: Es muy importante señalar que el sentido del versor colocado en el nudo indica el sentido + de las solicitaciones de las barras que concurren en ese nudo, en este caso particular será + la compresión.

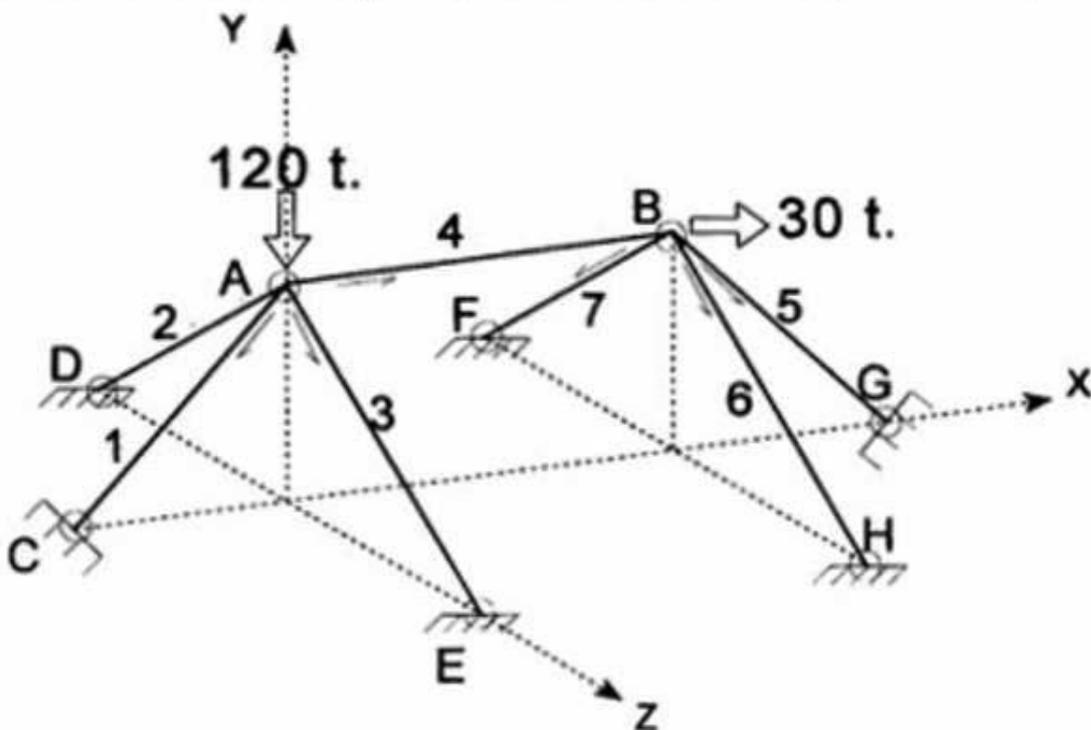
Se soluciona cambiando el signo al vector de cargas.

Se consigue mantener el convenio.

Matricial en estructura espaciales hiperestáticas I

La utilización del método para estructuras espaciales no aporta ninguna novedad, realizaremos la matriz de equilibrio [E], como en las estructuras isostáticas, a continuación confeccionaremos la matriz de rigidez de barras en ejes locales [K], que seguirá siendo una matriz cuadrada y diagonal y por último la matriz de transformación de deformaciones [T], será, también, la traspuesta de la matriz de equilibrio [E], puesto que la demostración que hicimos con anterioridad tenía carácter general para todo tipo de estructuras.

Dada la estructura formada por siete barras de longitudes iguales a 4m. , todas de igual sección recta $A = 30 \text{ cm}^2$ y del mismo material con módulo de elasticidad longitudinal $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$, realizadas en acero A - 52 con un límite elástico del material $\sigma_e = 3600 \text{ Kp/cm}^2$. (se supondrá realizada la comprobación a pandéo).



Coordenadas Cartesianas de los nudos:

$$A \Rightarrow (0; 4\sqrt{2}; 0) \quad B \Rightarrow (4; 4\sqrt{2}; 0) \quad C \Rightarrow (-4\sqrt{2}; 0; 0)$$

$$D \Rightarrow (0; 0; -4\sqrt{2}) \quad E \Rightarrow (0; 0; 4\sqrt{2}) \quad F \Rightarrow (4; 0; -4\sqrt{2})$$

$$G \Rightarrow (4 + 4\sqrt{2}; 0; 0) \quad H \Rightarrow (4; 0; 4\sqrt{2})$$

Barra 1 : une el nudo C con el A , colocando el versor en A

$$X_C - X_A = -4\sqrt{2} \Rightarrow \cos \alpha = (-4\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2$$

$$Y_C - Y_A = -4\sqrt{2} \Rightarrow \cos \beta = (-4\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2$$

$$Z_C - Z_A = 0 \Rightarrow \cos \gamma = 0/4 = 0$$

Matricial en estructura espaciales hiperestáticas II

Barra 2 : une el nudo D con el A , colocando el versor en A

$$\begin{aligned}X_D - X_A = 0 & \Rightarrow \cos \alpha = 0/4 = 0 \\Y_D - Y_A = -4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \beta = (-4/\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2 \\Z_D - Z_A = -4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \gamma = (-4/\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2\end{aligned}$$

Barra 3 : une el nudo E con el A , colocando el versor en A

$$\begin{aligned}X_E - X_A = 0 & \Rightarrow \cos \alpha = 0/4 = 0 \\Y_E - Y_A = -4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \beta = (-4/\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2 \\Z_E - Z_A = 4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \gamma = (4/\sqrt{2})/4 = \sqrt{2}/2\end{aligned}$$

Barra 4 : une el nudo A con el nudo B , colocando el versor en A

$$\begin{aligned}X_B - X_A = 4 & \Rightarrow \cos \alpha = 4/4 = 1 \\Y_B - Y_A = 0 & \Rightarrow \cos \beta = 0/4 = 0 \\Z_B - Z_A = 0 & \Rightarrow \cos \gamma = 0/4 = 0\end{aligned}$$

Barra 5 : une el nudo B con el G , colocando el versor en B

$$\begin{aligned}X_G - X_B = 4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \alpha = (4/\sqrt{2})/4 = \sqrt{2}/2 \\Y_G - Y_B = -4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \beta = (-4/\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2 \\Z_G - Z_B = 0 & \Rightarrow \cos \gamma = 0/4 = 0\end{aligned}$$

Barra 6 : une el nudo B con el H , colocando el versor en B

$$\begin{aligned}X_H - X_B = 0 & \Rightarrow \cos \alpha = 0/4 = 0 \\Y_H - Y_B = -4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \beta = (-4/\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2 \\Z_H - Z_B = 4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \gamma = (4/\sqrt{2})/4 = \sqrt{2}/2\end{aligned}$$

Barra 7 : une el nudo B con el F , colocando el versor en B

$$\begin{aligned}X_F - X_B = 0 & \Rightarrow \cos \alpha = 0/4 = 0 \\Y_F - Y_B = -4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \beta = (-4/\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2 \\Z_F - Z_B = -4/\sqrt{2} & \Rightarrow \cos \gamma = (-4/\sqrt{2})/4 = -\sqrt{2}/2\end{aligned}$$

* En la ecuación matricial $[P] = [E] * [N]$ desarrollada por completo, la matriz de equilibrio $[E]$, constaría de 16 filas, ya que hay ocho nudos y 7 columnas, ya que son siete las barras. Al imponer las condiciones de contorno eliminaremos todas las filas que contengan reacciones, es decir, todas las correspondientes a los nudos: C, D, E, F, G, H, ya que todos estos nudos son fijos. Por ello, podemos escribir solo las ecuaciones de equilibrio de los nudos A Y B.

Matriz de equilibrio

La ecuación matricial $[P] = [E] * [N]$ quedará:

| Nudo: | | Barra: | | | | | | | |
|----------|----------|---------------|---------------|---------------|----|---------------|---------------|---------------|-------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| A | 0 | $-\sqrt{2}/2$ | 0 | 0 | 1 | | | | N_1 |
| | -120 | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | 0 | | | | N_2 |
| | 0 | 0 | $-\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 0 | | | | N_3 |
| B | 30 | | | | -1 | $\sqrt{2}/2$ | 0 | 0 | N_4 |
| | 0 | | | | 0 | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | N_5 |
| | 0 | | | | 0 | 0 | $\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | N_6 |
| C | R_{CX} | $\sqrt{2}/2$ | | | | | | | N_7 |
| | R_{CY} | $\sqrt{2}/2$ | | | | | | | |
| | R_{CZ} | 0 | | | | | | | |
| D | R_{DX} | | 0 | | | | | | |
| | R_{DY} | | $\sqrt{2}/2$ | | | | | | |
| | R_{DZ} | | $\sqrt{2}/2$ | | | | | | |
| E | R_{EX} | | | 0 | | | | | |
| | R_{EY} | | | $\sqrt{2}/2$ | | | | | |
| | R_{EZ} | | | $-\sqrt{2}/2$ | | | | | |
| F | R_{FX} | | | | | | | 0 | |
| | R_{FY} | | | | | | | $\sqrt{2}/2$ | |
| | R_{FZ} | | | | | | | $\sqrt{2}/2$ | |
| G | R_{GX} | | | | | $-\sqrt{2}/2$ | | | |
| | R_{GY} | | | | | $\sqrt{2}/2$ | | | |
| | R_{GZ} | | | | | 0 | | | |
| H | R_{HX} | | | | | | 0 | | |
| | R_{HY} | | | | | | $\sqrt{2}/2$ | | |
| | R_{HZ} | | | | | | $-\sqrt{2}/2$ | | |

Matrices [E] [K] [T]

* La matriz de equilibrio [E] es:

$$[E] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & & & \\ \hline 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & & & \\ \hline & & & -1 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \hline & & & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \hline \end{array}$$

* La matriz de rigidez en ejes locales [K] es:

$$[K] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 150 & & & & & & \\ \hline & 150 & & & & & \\ \hline & & 150 & & & & \\ \hline & & & 150 & & & \\ \hline & & & & 150 & & \\ \hline & & & & & 150 & \\ \hline & & & & & & 150 \\ \hline \end{array}$$

(t / cm)

* La matriz de transformación de deformaciones [T] es:

$$[T] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & & & \\ \hline 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & & & \\ \hline 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline & & & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \hline & & & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \hline & & & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \hline \end{array}$$

Vectores [D] [Δ] [N]

* La ecuación matricial $[P] = [Ke] * [D]$, desarrollada es:

| | | | | | | | | |
|-------|---|-------|-----|-----|-------|------|-----|----------|
| 0 | | 225 | 75 | | - 150 | | | D_{AX} |
| - 120 | | 75 | 225 | | | | | D_{AY} |
| 0 | | | | 150 | | | | D_{AZ} |
| 30 | = | - 150 | | | 225 | - 75 | | D_{BX} |
| 0 | | | | | - 75 | 225 | | D_{BY} |
| 0 | | | | | | | 150 | D_{BZ} |

* Los vectores [D], [Δ] y [N] los obtendremos resolviendo la ecuaciones matriciales:

$$[P] = [Ke] * [D]$$

$$[\Delta] = - [T] * [D]$$

$$[N] = [K] * [\Delta]$$

$$[D] = \begin{matrix} + 0,7143 \\ - 0,7143 \\ 0,0000 \\ + 0,6857 \\ + 0,2286 \\ 0,0000 \end{matrix}$$

(cm.)

$$[\Delta] = \begin{matrix} - 0,0404 \\ - 0,5455 \\ - 0,5455 \\ - 0,0286 \\ - 0,3232 \\ + 0,1616 \\ + 0,1616 \end{matrix}$$

(cm.)

$$[N] = \begin{matrix} - 6,0609 \\ -81,8224 \\ -81,8224 \\ - 4,2857 \\ - 48,4873 \\ + 24,2437 \\ + 24,2437 \end{matrix}$$

(t.)

Nota: Como la matriz de rigidez global [Ke] es un invariante. El vector de cargas [P] y el vector desplazamientos [Δ], tienen el mismo convenio de signos en ejes generales.

Se ha forzado el cambio de signo en la matriz [T] para mantener el convenio:

Tracción +

Compresión -

Clasificación de las estructuras articuladas espaciales

Su clasificación es análoga a la de las estructuras planas:

Si el análisis de las mismas no puede realizarse mediante la utilización exclusiva de las ecuaciones de la estática, siendo necesarias entonces las ecuaciones de comportamiento del material y las de compatibilidad de las deformaciones la estructura es: HIPERESTÁTICA.

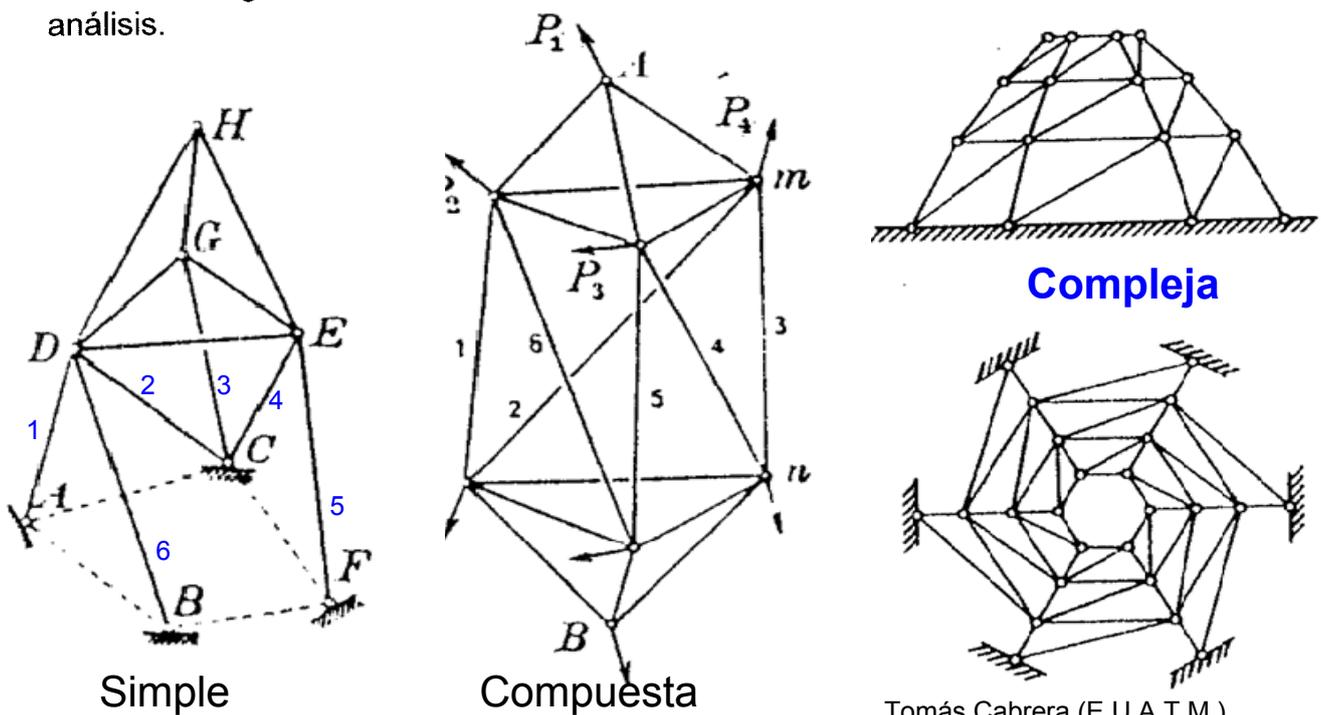
Si el análisis de las mismas puede realizarse mediante la utilización exclusiva de las ecuaciones de la estática: ISOSTÁTICA.

Las estructuras articuladas isostáticas se dividen a su vez en:

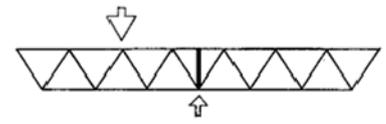
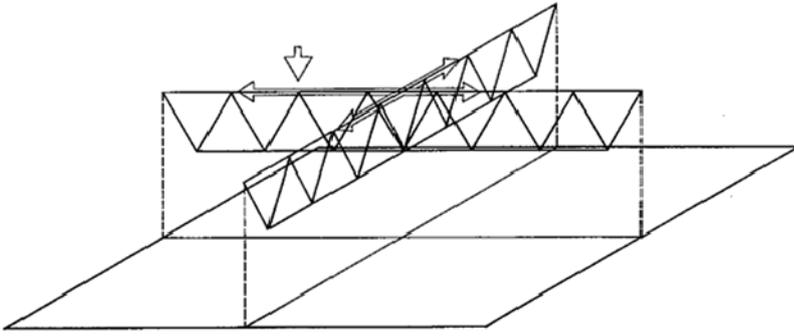
* Simples o canónicas.- Así como en el plano la estructura libre más sencilla es el triángulo, en el espacio la estructura libre más sencilla es el tetraedro. La generación de estructuras mayores por adición de tetraedros sucesivos, es análoga a la de las estructuras planas trianguladas. Las estructuras así engendradas se llaman simples.

* Compuestas.- Otro modo de engendrar las estructuras articuladas en el espacio consiste en unir entre sí, mediante barras, dos estructuras indeformables simples o complejas (que veremos a continuación), de modo que se forme una única estructura inderformable, llamada compuesta. A fin de impedir cualquier movimiento relativo de una de las estructuras parciales respecto a la otra son necesarias seis barras (al igual que para enlazar una estructura al suelo), y las seis barras deben estar dispuestas de tal modo que no exista ninguna recta que encuentre a sus seis ejes.

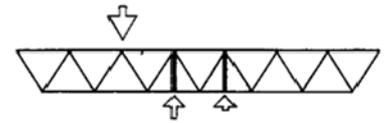
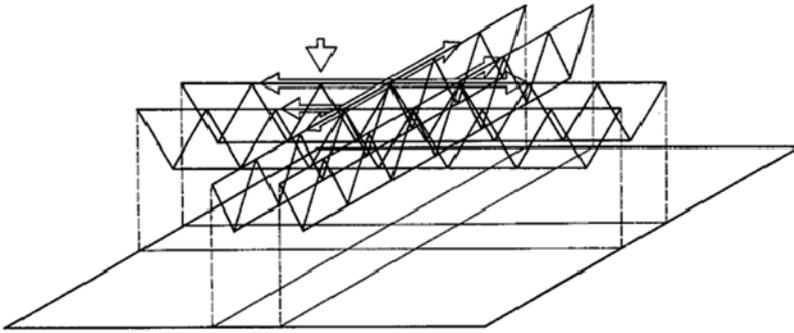
* Complejas.- Se llaman complejas las estructuras que no están engendradas ni por tetraedros sucesivos ni ligando entre sí dos estructuras simples. Usualmente pueden considerarse obtenidas de estructuras simples sustituyendo una o varias barras por otras dispuestas de otro modo. Frecuentemente, las estructuras complejas no tienen ningún nudo en el concurren tres barras, por el que pueda comenzarse su análisis.



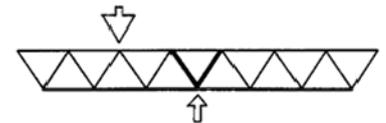
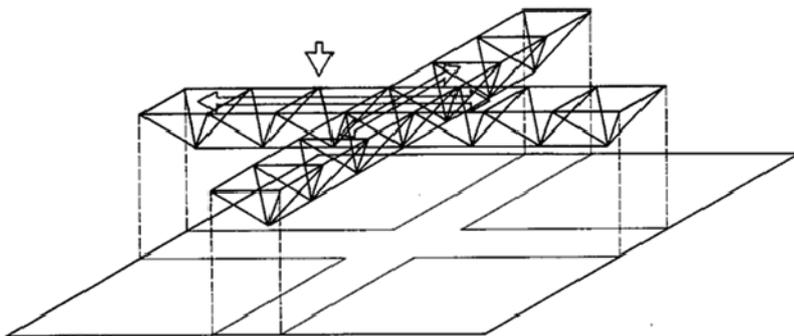
Mecanismo sustentante sistemas reticulados espaciales



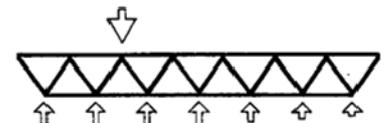
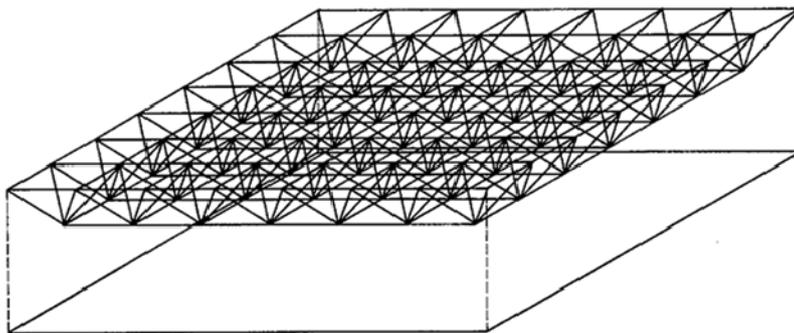
Participación de la cercha no cargada directamente, en la resistencia a la deformación.



Incremento de la eficacia mediante yuxtaposición de cerchas paralelas adicionales.



Mayor incremento de la eficacia mediante la combinación de cerchas paralelas.



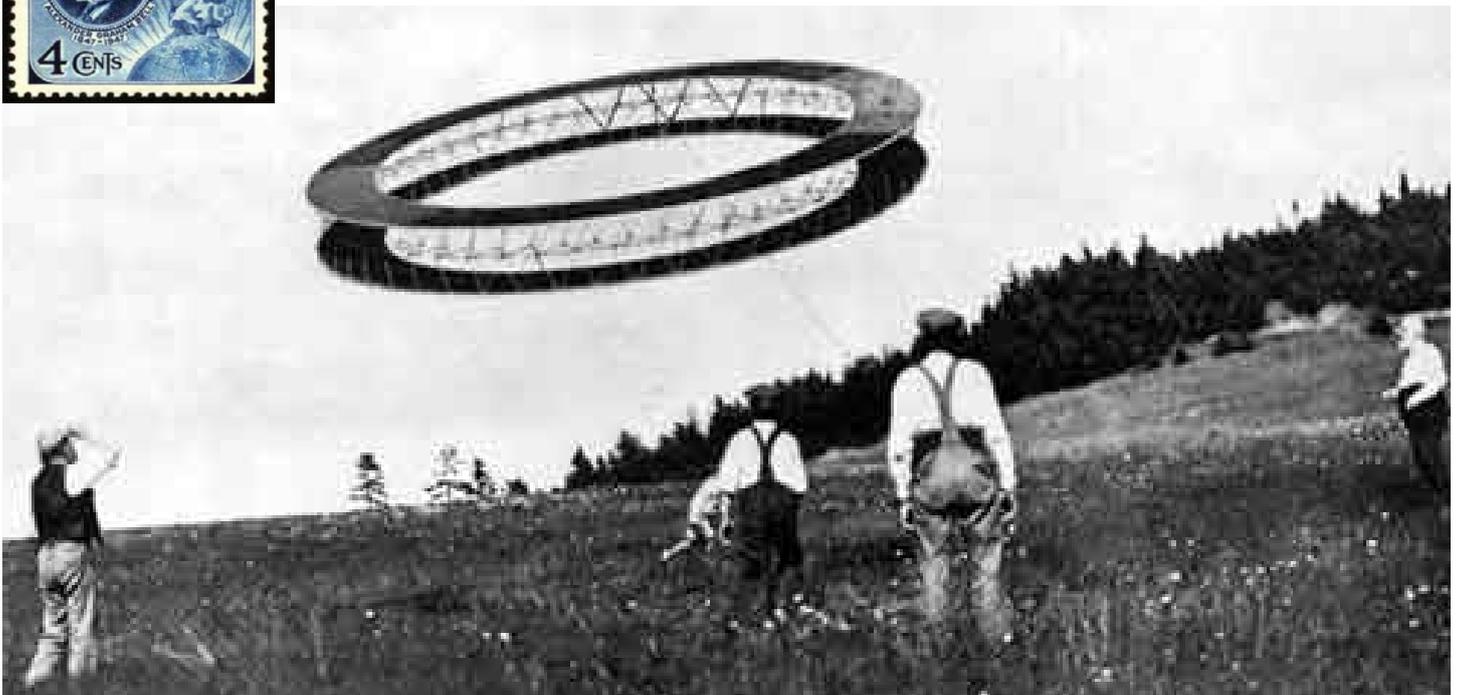
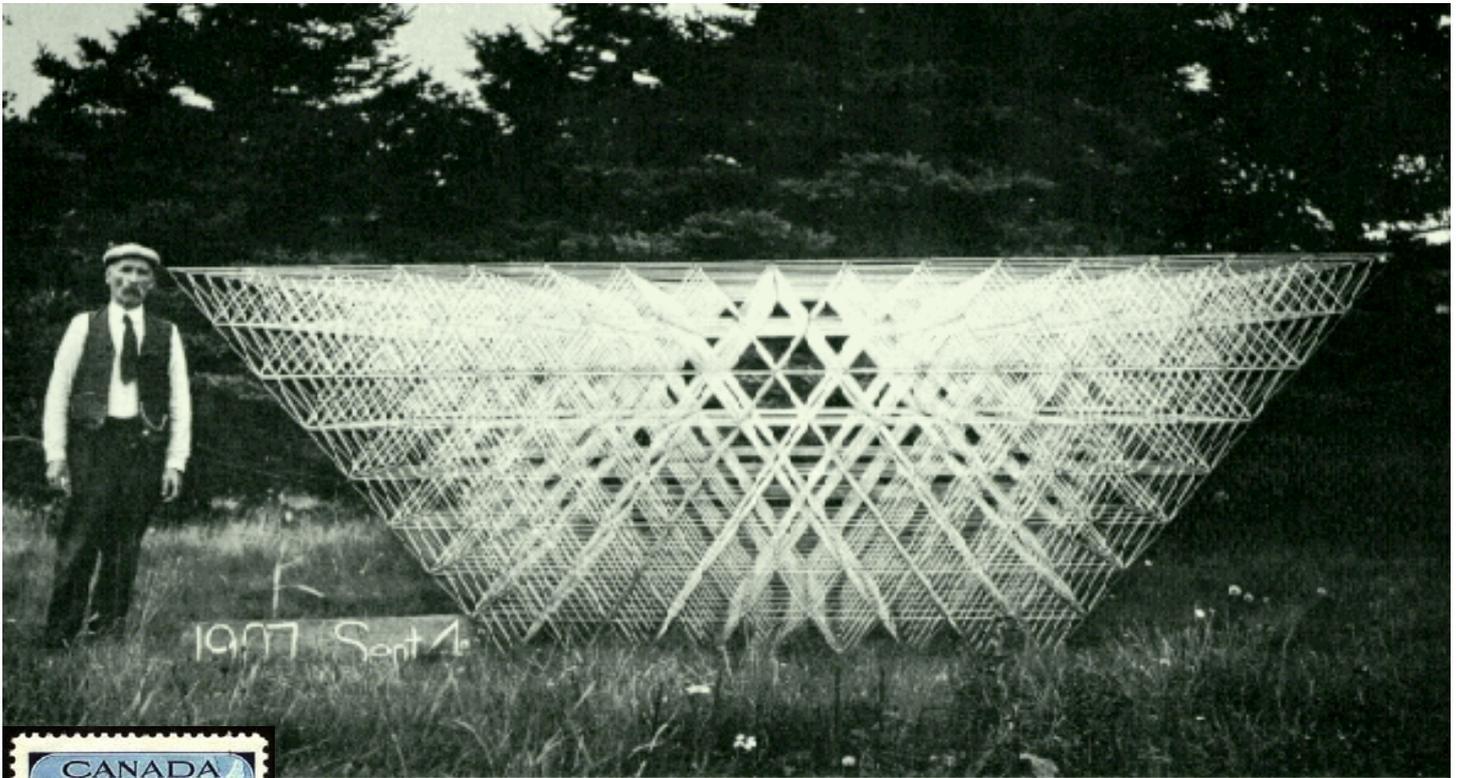
Optima eficacia mediante la continuidad en longitud y anchura.



Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

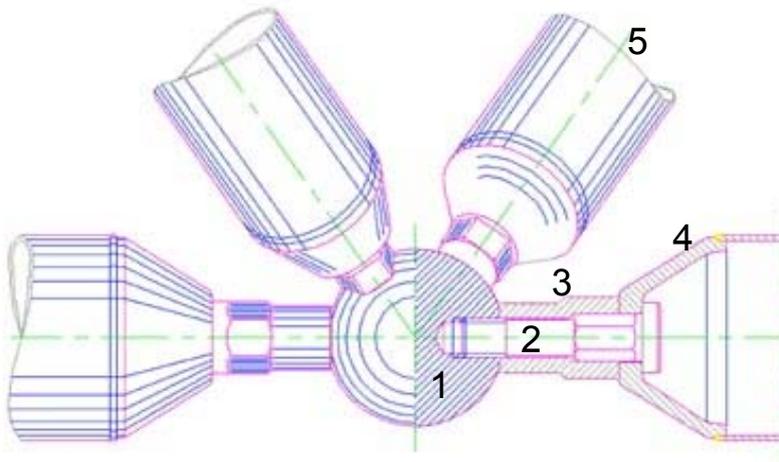
Graham Bell (1847 – 1922)

Esta figura (1907) muestra lo que fue probablemente la primera estructura espacial prefabricada. Su inventor Graham Bell, la había imaginada para estudios sobre los aparatos voladores

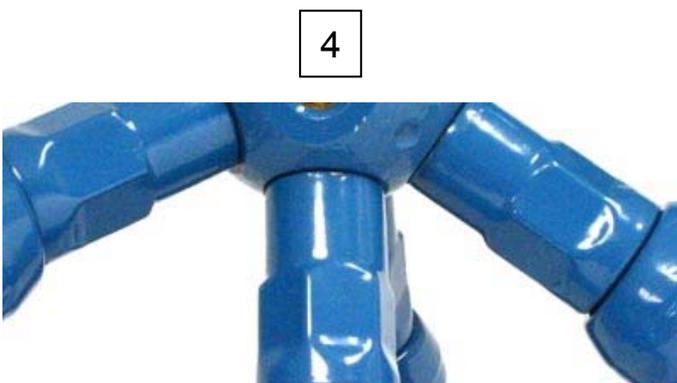


La cometa de Graham Bell

LANIK nudo sistema "SEO"



- 1/ Esfera.
- 2/ Tornillo.
- 3/ Casquillo separador.
- 4/ Platillo cónico
- 5/ Tubo

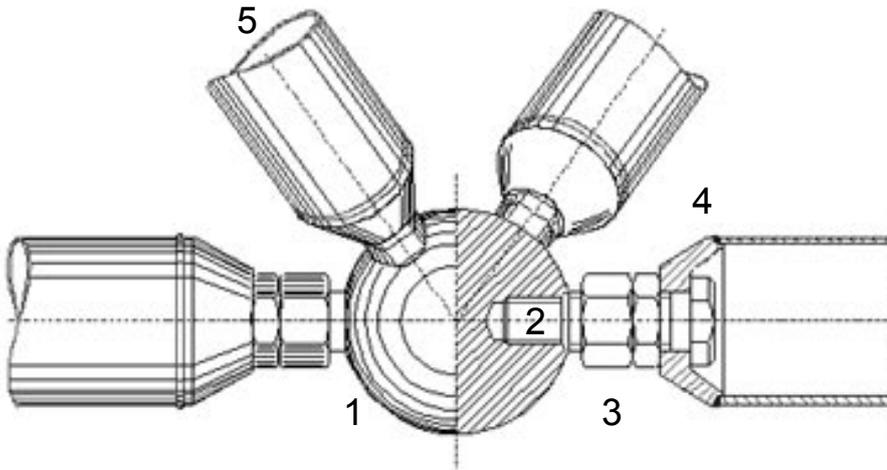


LANIK nudo sistema "ORTZ"



TABLA I - GAMA NORMALIZADA DE TORNILLOS Y ESFERAS

| TORNILLO M. Der/M. Iz | ESFERA | | CAPACIDAD (KN) |
|--------------------------|----------|--------|-------------------|
| | φ Normal | φ Min. | |
| 16/12 | 60 | 60 | 59 |
| 20/16 | 76 | 60 | 110 |
| 27/22 | 100 | 76 | 213 |
| 36/30 | 134 | 100 | 396 |
| 45/37 | 150 | 134 | 612 |
| 52/44 | 178 | 150 | 876 |
| 64/54 | 210 | 178 | 1370 |
| 76/64 | 250 | 210 | 1980 |



- 1/ Esfera.
- 2/ Tornillo.
- 3/ Doble tuerca.
- 4/ Platillo cónico
- 5/ Tubo

1

3

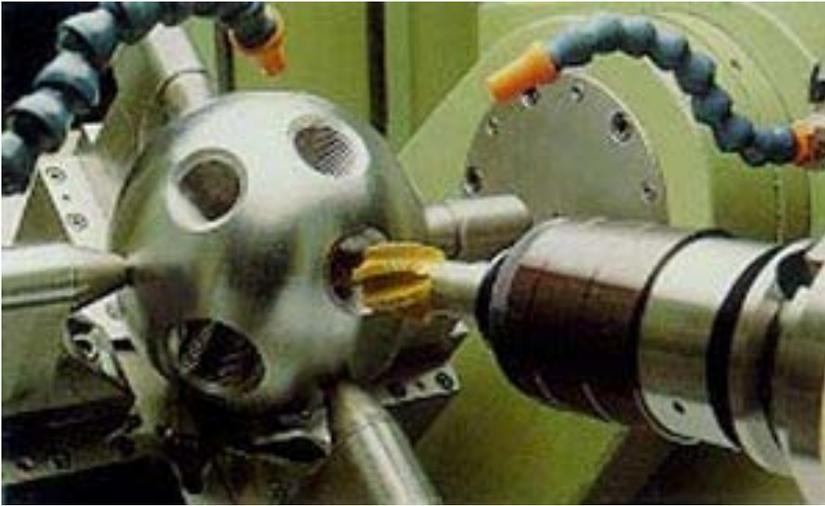


4

5



Fabricación, control y ensayos



CARTA de COLORES



BLANCO RAL 9010



BEIGE RAL 1015



AMARILLO RAL 1021



NARANJA RAL 2004



ROJO RAL 3000



AZUL RAL 5010



VERDE RAL 6002



MARRON RAL 8014

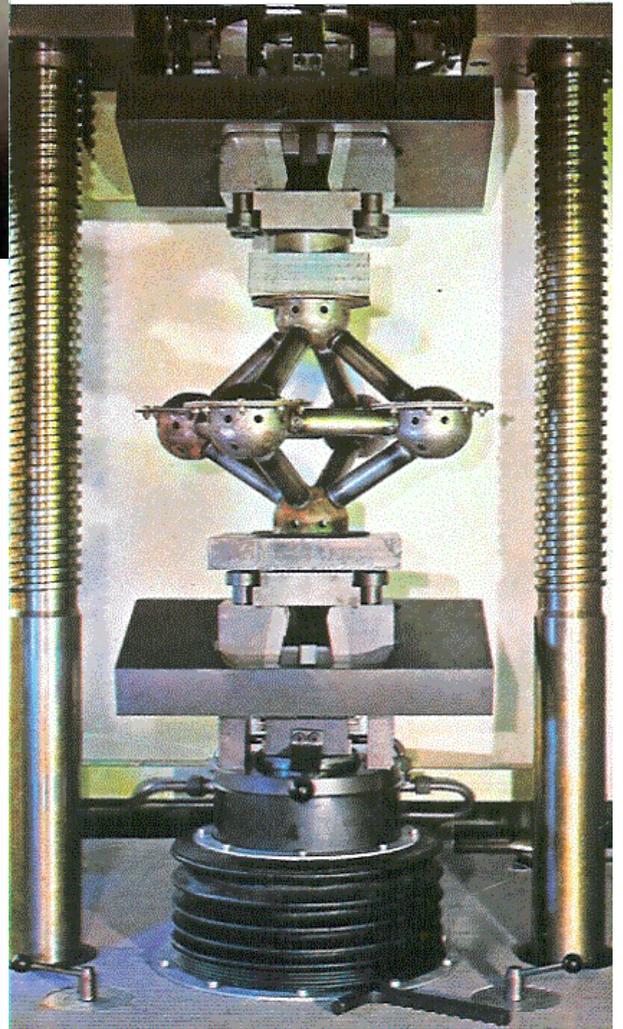
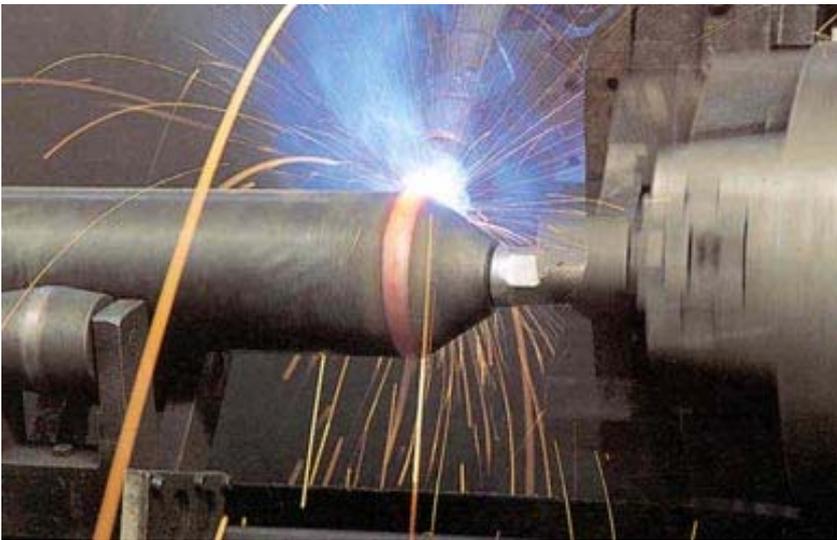


GRIS RAL 7035



NEGRO RAL 9011

Debido al proceso de impresión offset, los colores de este muestrario pueden presentar ligeras diferencias con relación al standard original.
* Los colores amarillo y naranja a consultar con LANIK



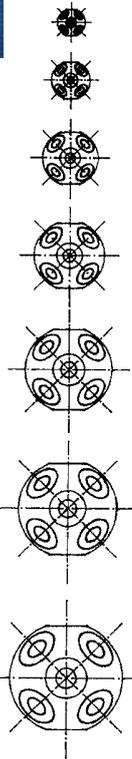
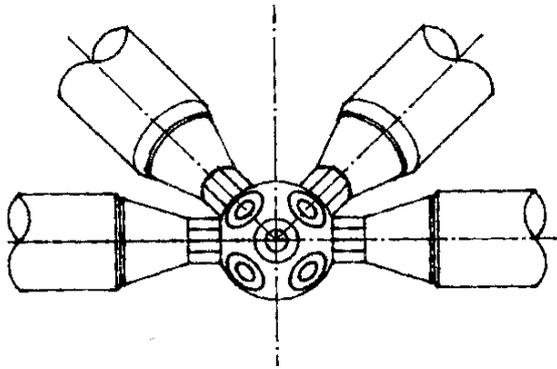
Ensayo destructivo sistema PALC 1 (Arcelor)



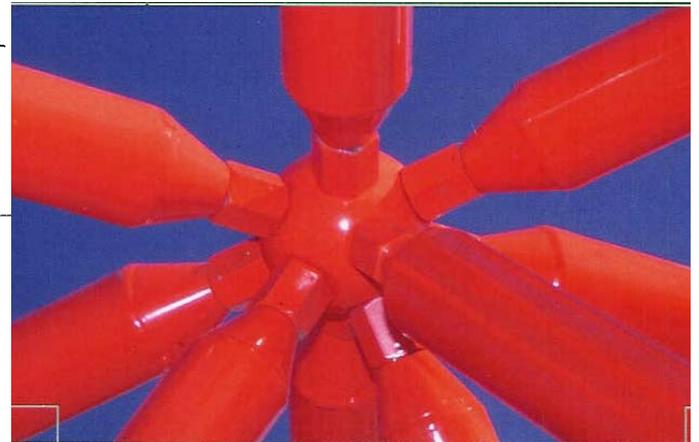
Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

ARCELOR sistema PALC

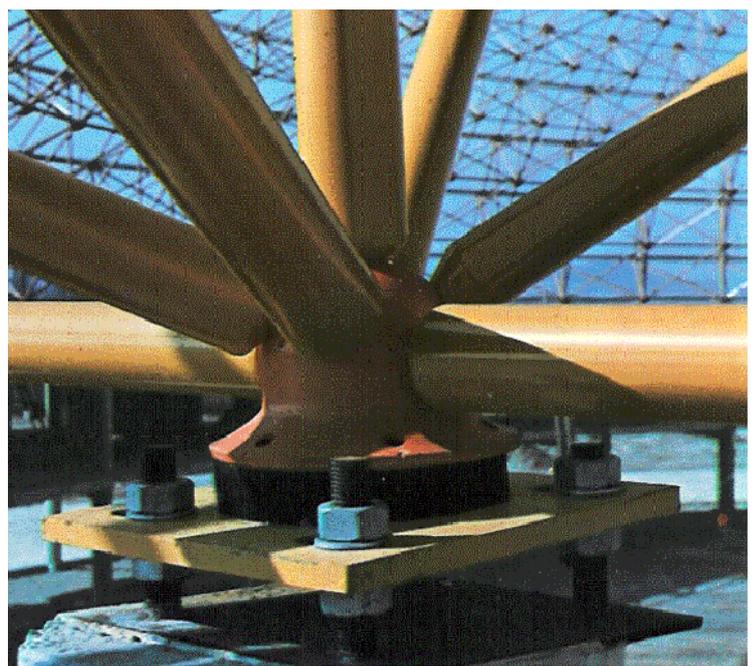
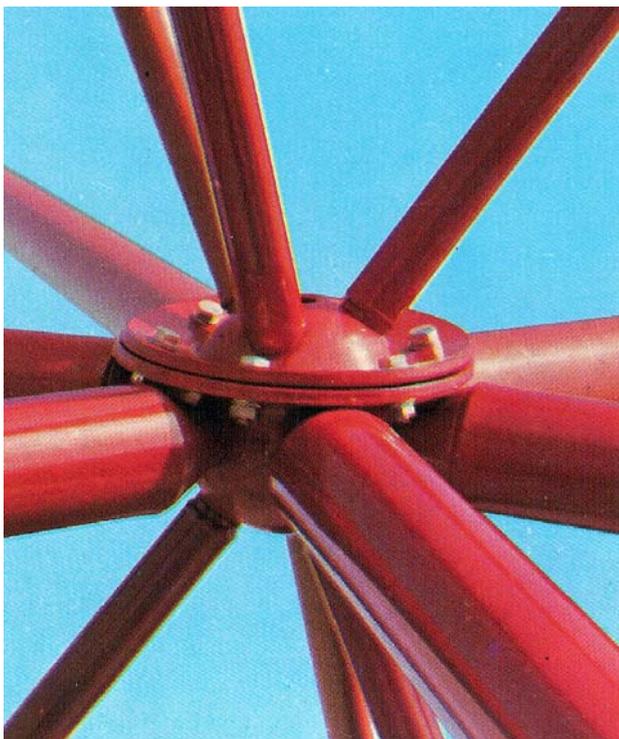
PALC 3



| Diámetro (mm) | Nominal (mm) | P (Kg) | Tensión máx (Kg) |
|---------------|--------------|--------|------------------|
| 54 | 50 | 0,540 | 4.000 |
| 77 | 70 | 1,800 | 7.520 |
| 108 | 100 | 4,350 | 16.000 |
| 153 | 125 | 9,640 | 23.100 |
| 185 | 154 | 18,100 | 37.200 |
| 190 | 175 | 26,575 | 50.200 |
| 217 | 200 | 39,200 | 72.400 |



PALC 1

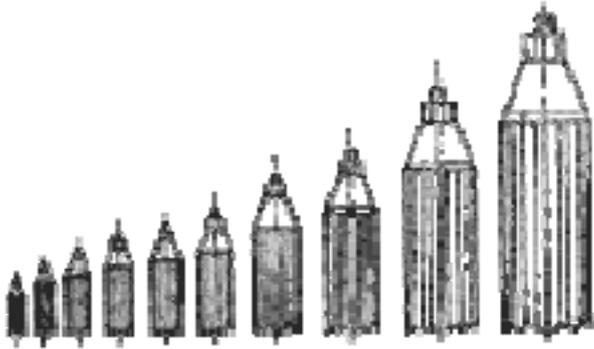


Ensayo destructivo sistema PALC 1 (Arcelor)

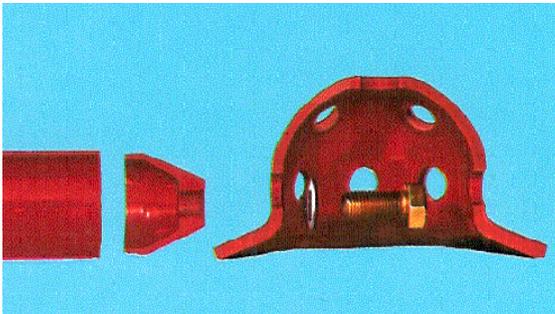
Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

ARCELOR sistema PALC1 y PALC3

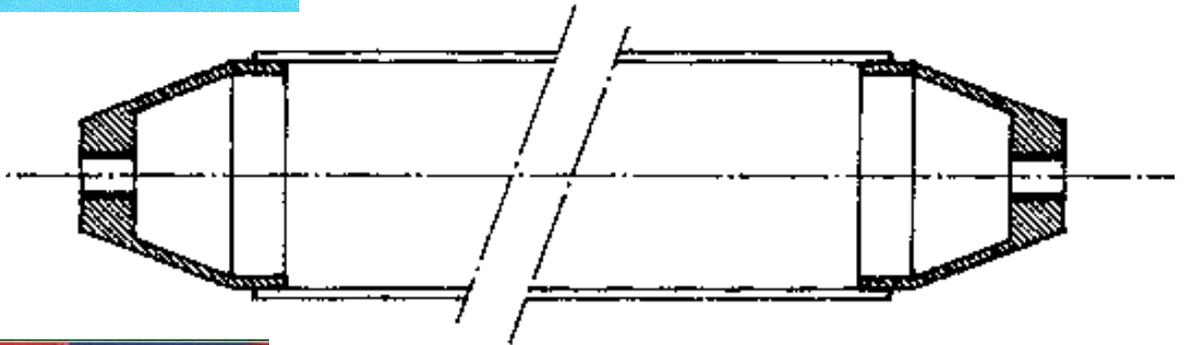
Barras



| Diámetro (mm) | e (mm) | P (Kg/m) | A (cm ²) | I (cm ⁴) | i (cm) |
|---------------|--------|----------|----------------------|----------------------|--------|
| 40 | 2 | 1,874 | 2,388 | 4,322 | 1,345 |
| 50 | 2 | 2,367 | 3,016 | 8,701 | 1,698 |
| 60 | 2 | 2,861 | 3,644 | 15,342 | 2,052 |
| 70 | 2,5 | 4,162 | 5,301 | 30,235 | 2,388 |
| 76 | 3 | 5,401 | 6,880 | 45,907 | 2,583 |
| 85 | 4 | 7,990 | 10,179 | 83,682 | 2,867 |
| 108 | 4 | 10,259 | 13,069 | 176,955 | 3,680 |
| 125 | 6 | 17,608 | 22,431 | 398,066 | 4,213 |
| 168 | 7 | 28,264 | 36,005 | 1171,623 | 5,704 |
| 219 | 9 | 46,610 | 59,376 | 3279,119 | 7,431 |



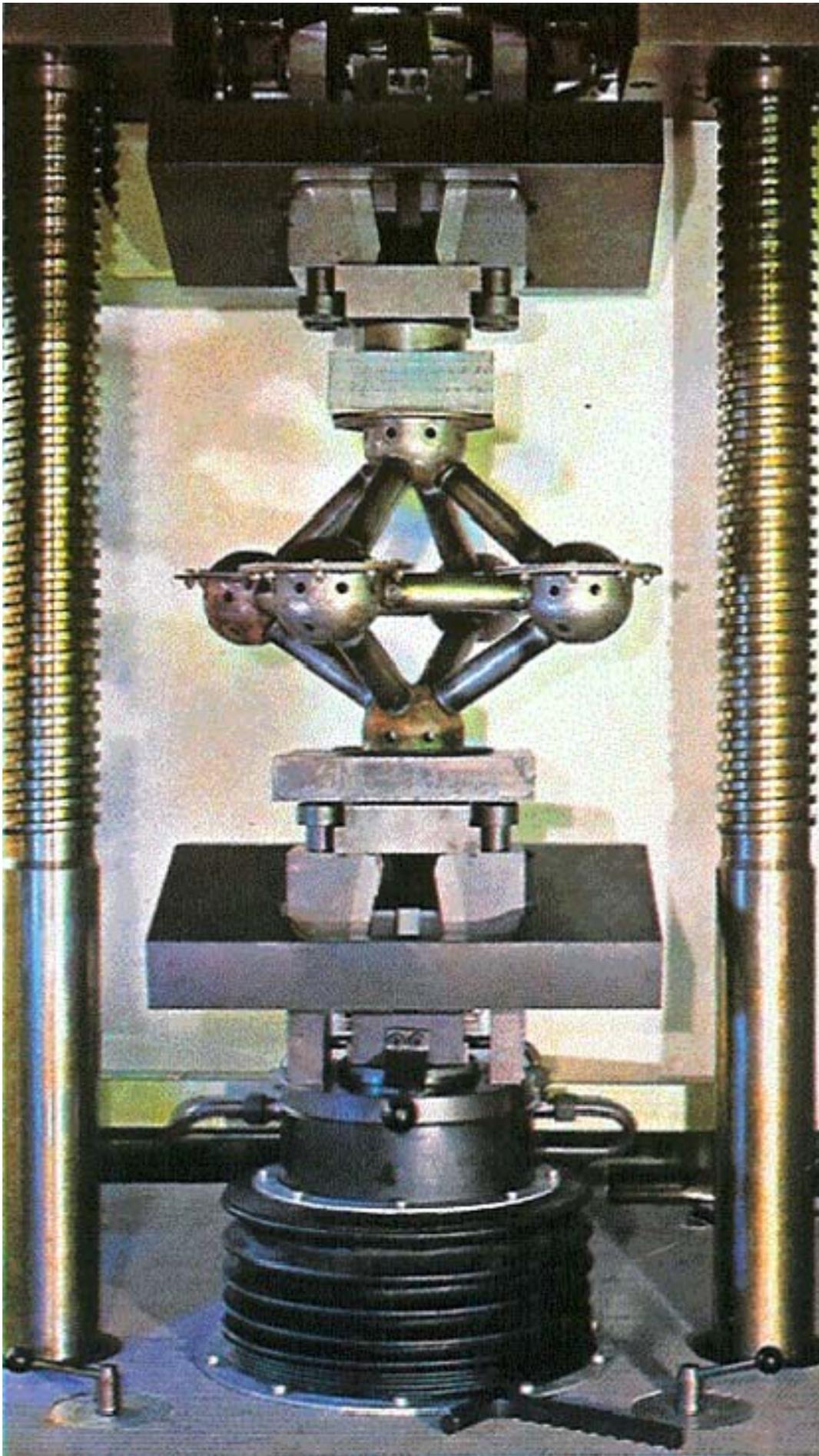
Palc 1



Palc 3

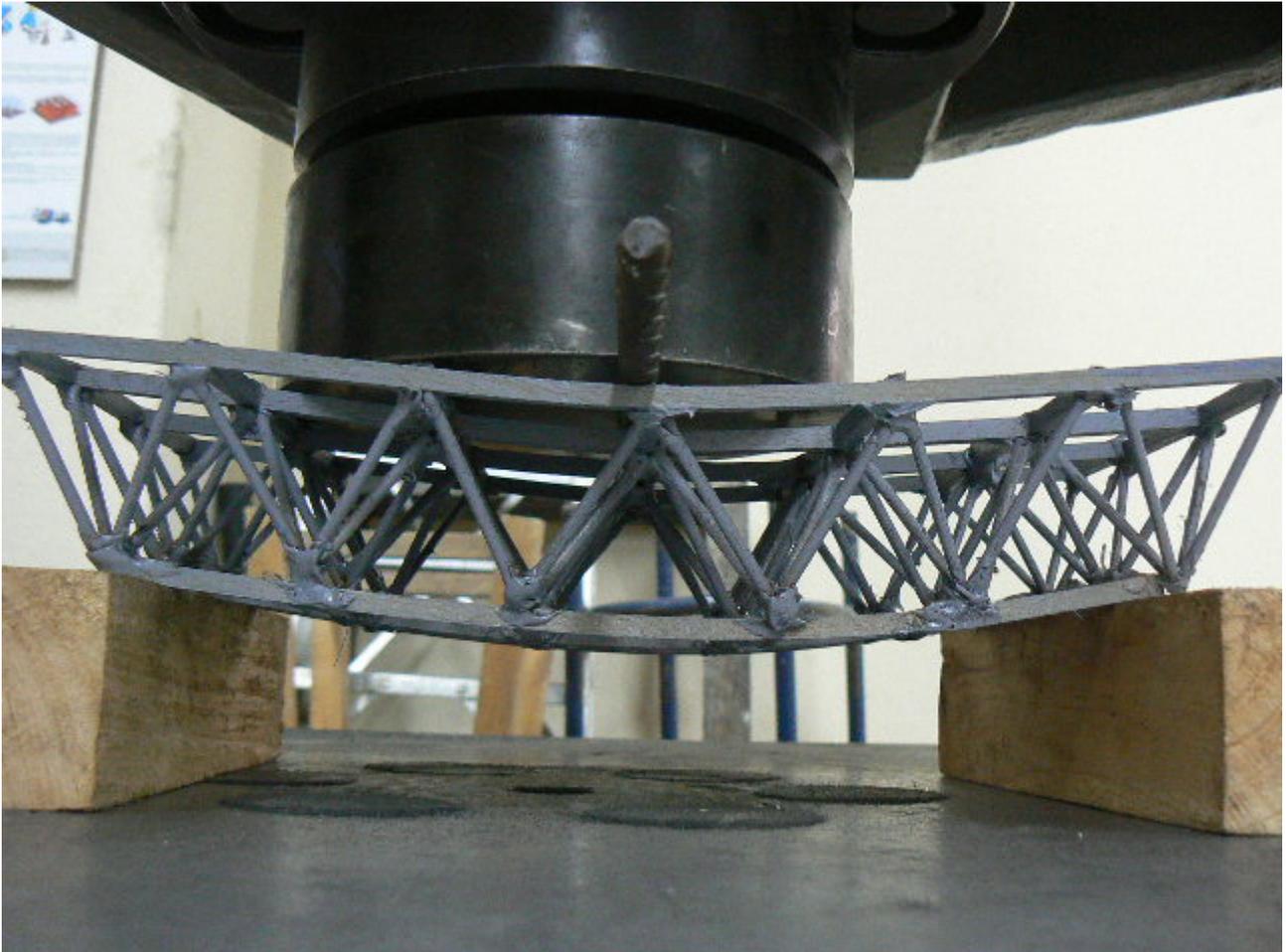


Ensayo destructivos uniones

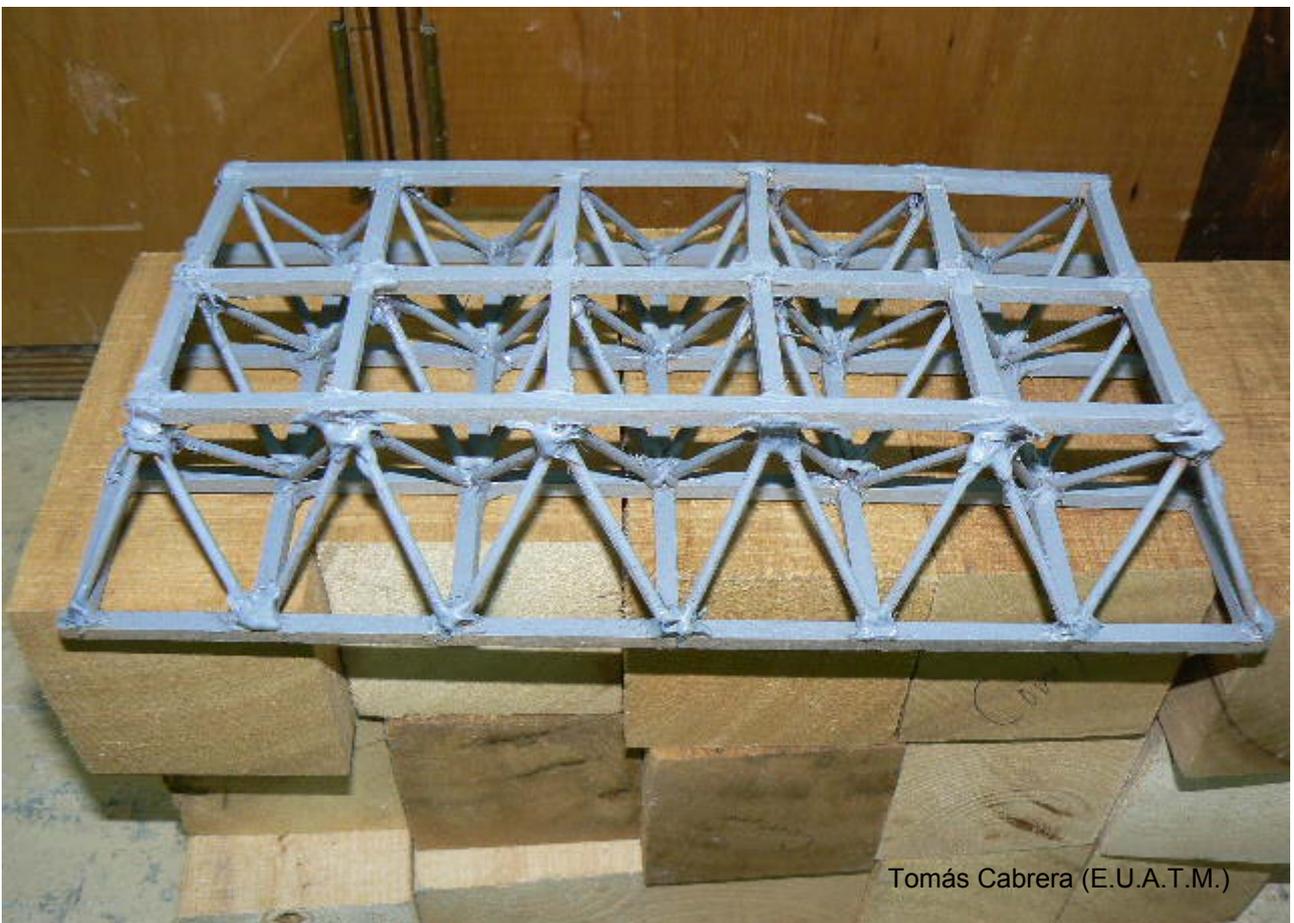


Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ensayo de maqueta



Publicado por ALEJANDRO CHAPARRO RODRIGUEZ en [5/04/2007](#)



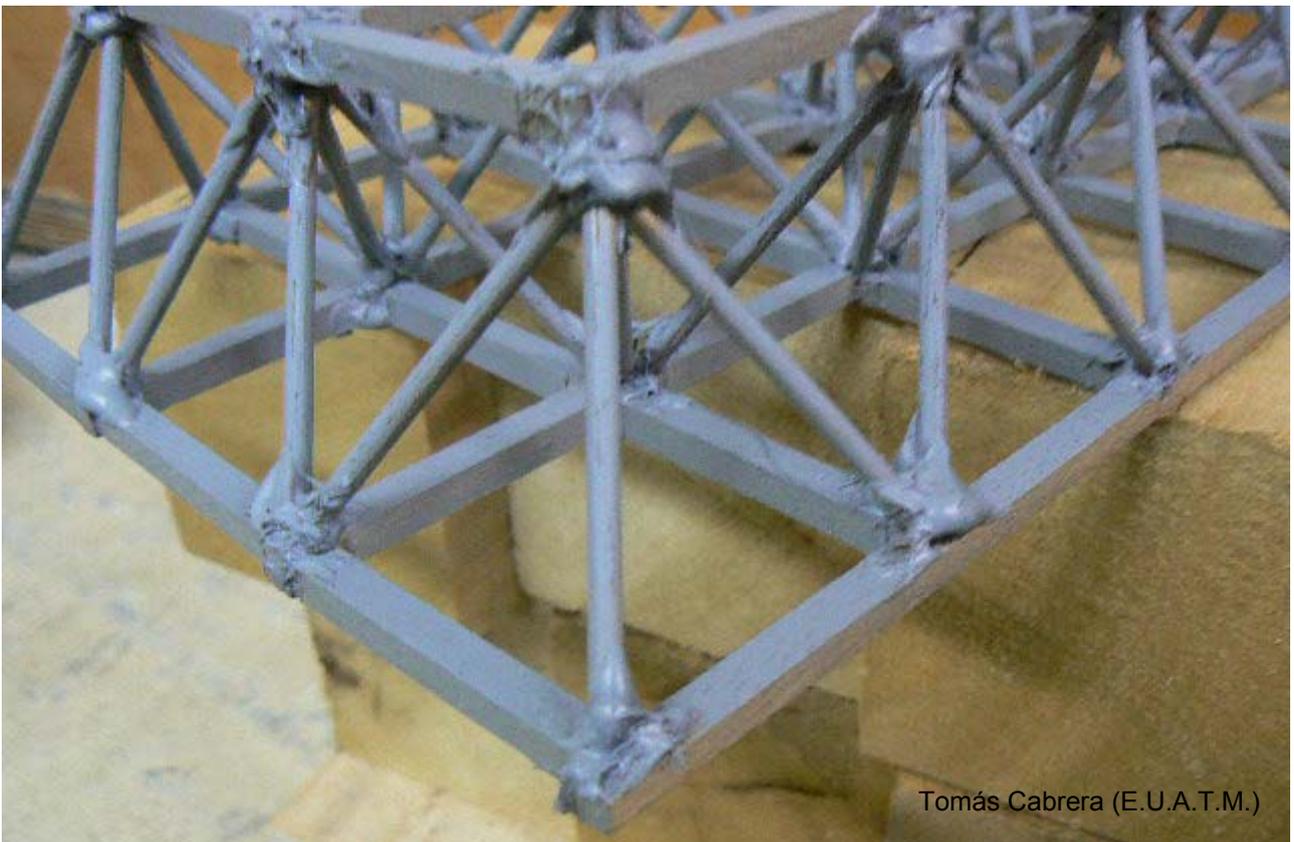
Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

<http://alejandroarke.blogspot.com/2007/05/triodetica.html>



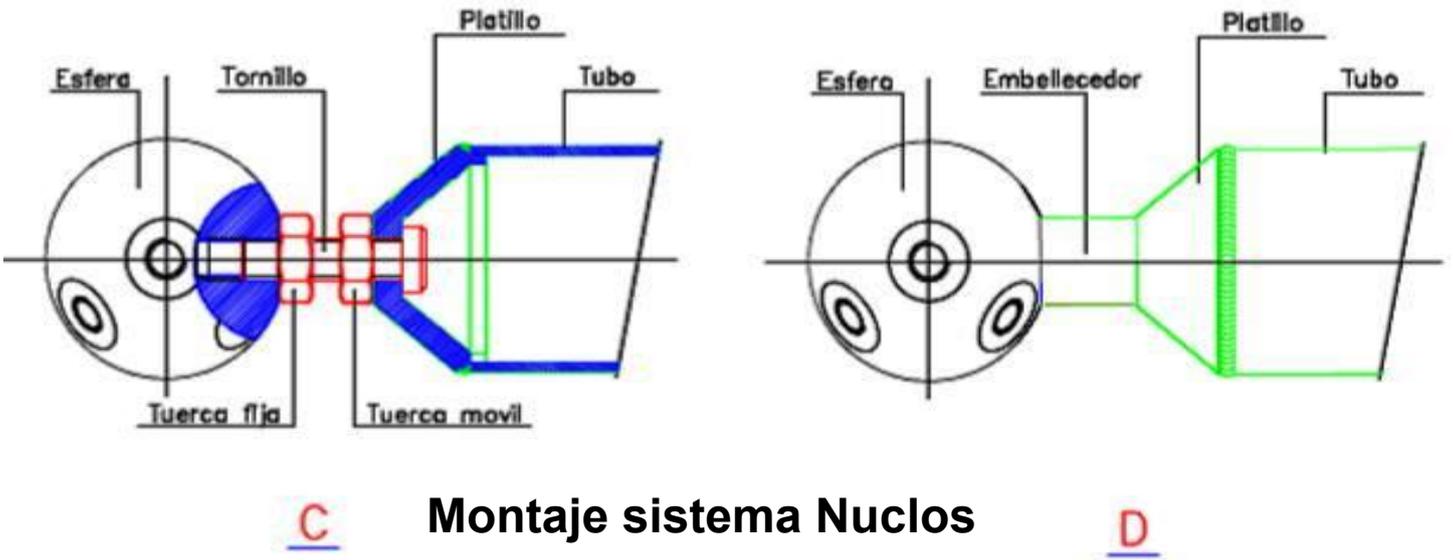
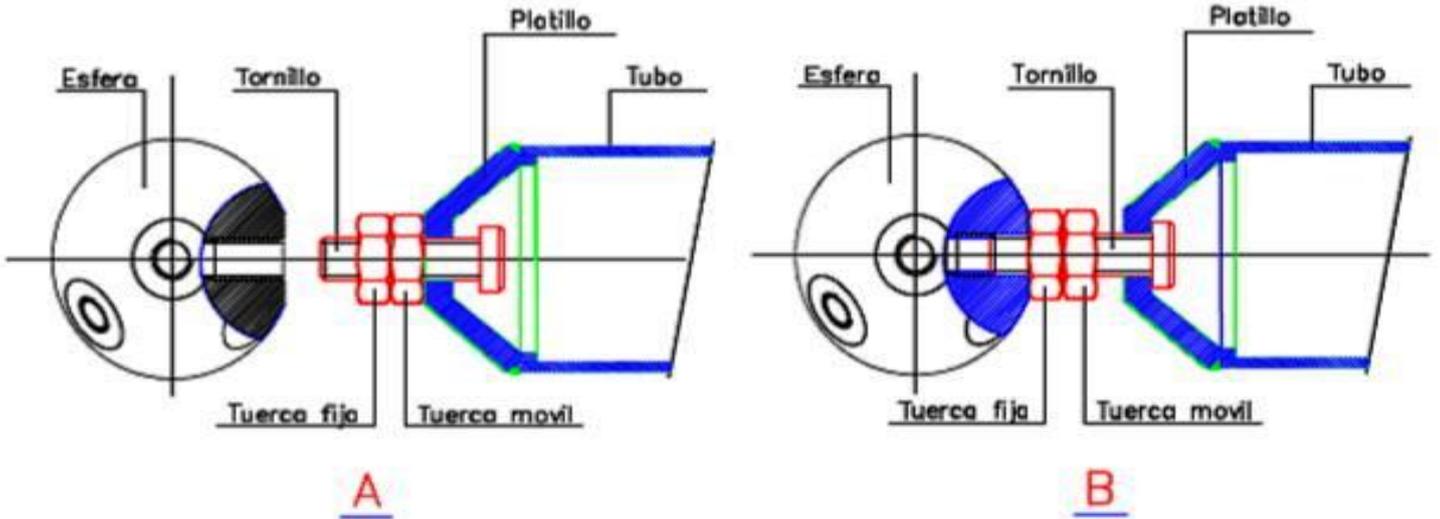
REALICE UNA TRIODÉTICA Y LA SOMETI A ESFUERZOS BAJO UNA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA, VIENDO SUS RESPECTIVOS COMPORTAMIENTOS A COMPRESIÓN Y TENSIÓN.

COMO DATO ADICIONAL LA TRIODÉTICA ALCANZÓ A SOPORTAR 75 KG. LO CUAL ES UNA CIFRA MUY ALTA PUES ES UNA ESTRUCTURA REALIZADA TAN SOLO CON MADERA BALSO Y PEGADA CON SILICONA EN LAS INTERSECCIONES.

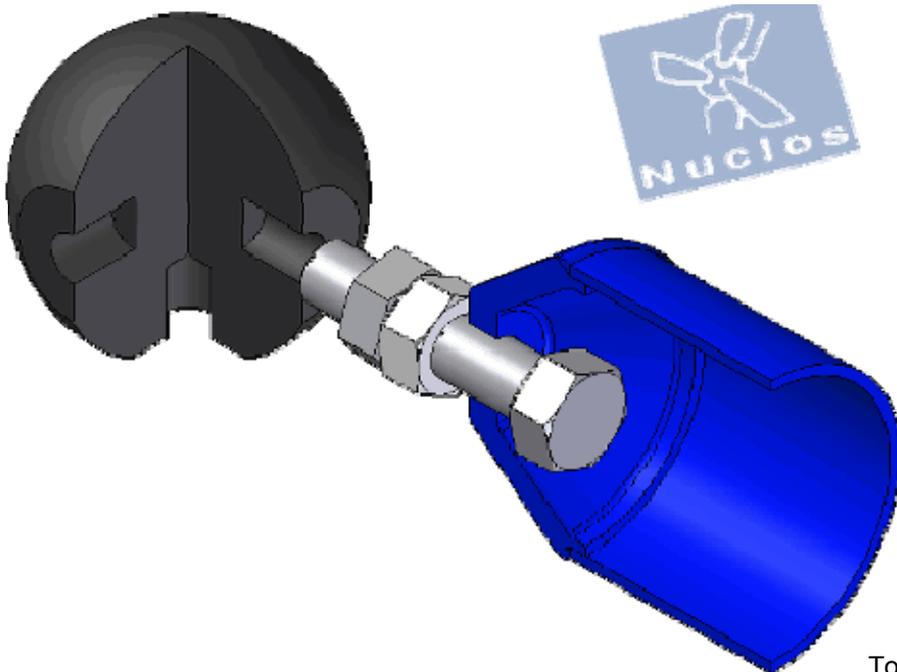


Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

ASTECA nudo sistema "NUCLOS"



Montaje sistema Nuclos



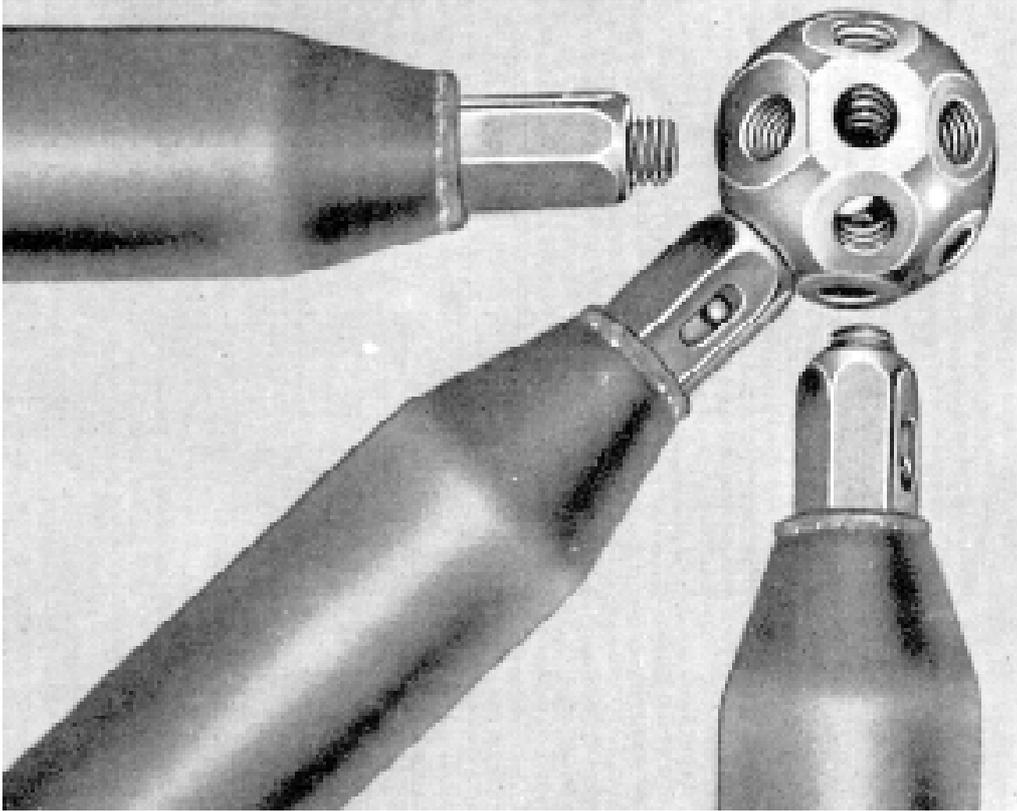
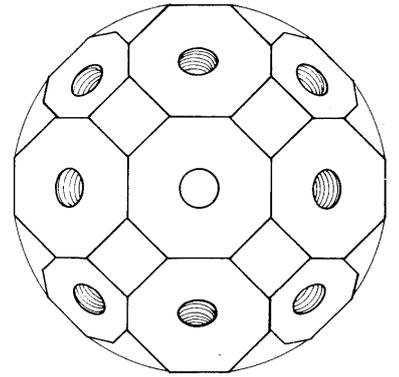
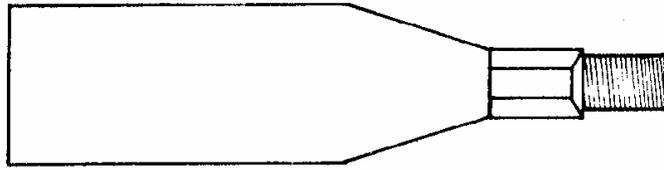
Estructuras articuladas espaciales



Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Nudo Mero alemania 1942 (Max Mergeringhausen)

Formado por octógonos inscritos en una esfera maciza, en cada uno de los cuales puede roscarse una barra, hasta un máximo de 18 barras.



Mero moderno (Ball Node system KK)

