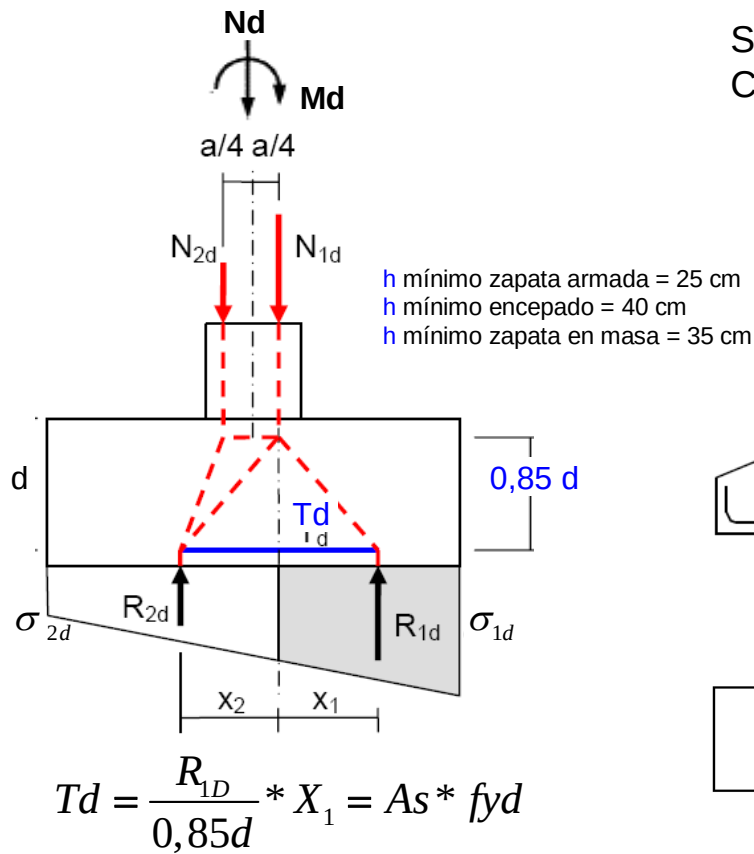


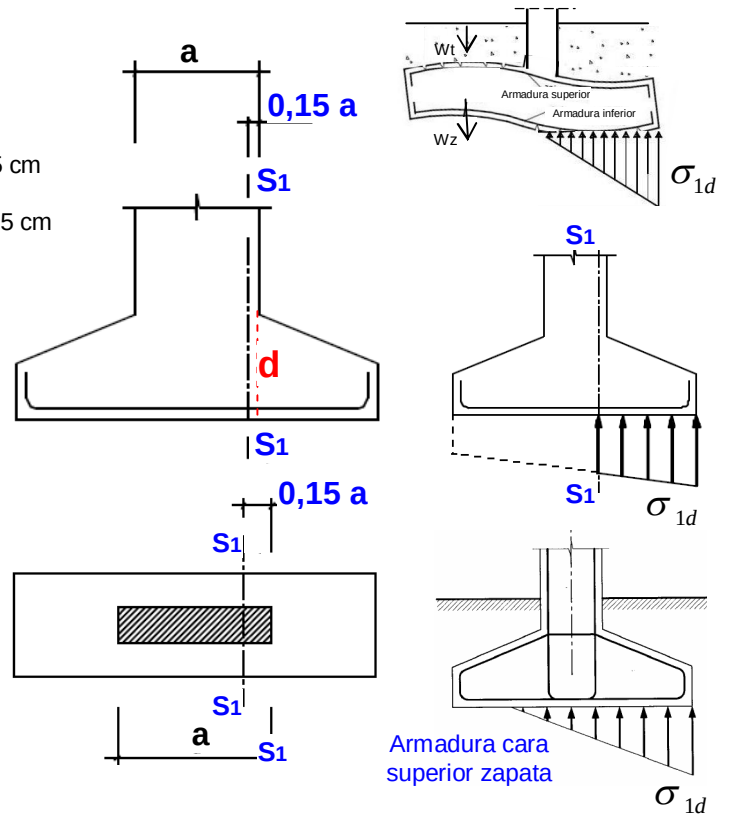
b/ para el cálculo estructural zapatas

Zapatas Rígidas: bielas y tirantes



Zapatas Flexibles: teoría general flexión

Sección referencia Momento flector = S_1
 Canto mecánico útil " d " en cara pilar



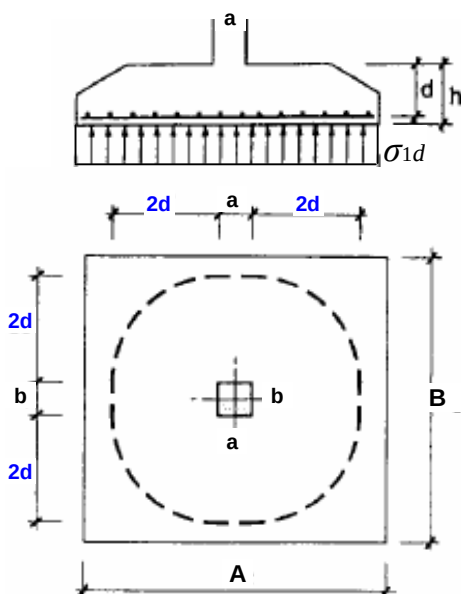
Se trabaja en **ESTADO LÍMITE ÚLTIMO**

Acciones mayoradas, contando tan sólo las acciones transmitidas por la estructura.

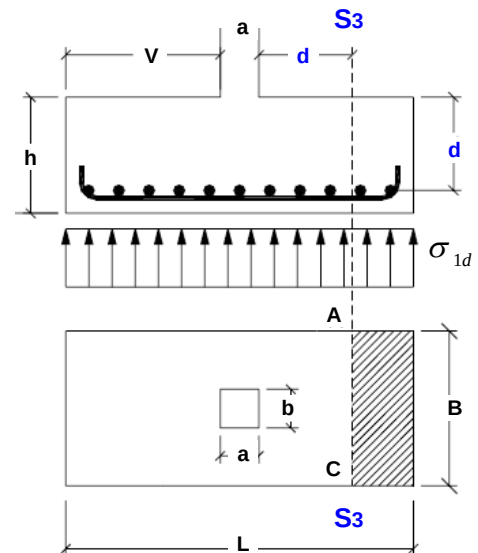
Es, decir, NO se considera el peso propio de la zapata si como es usual, esta se hormigona de forma continua. La reacción del terreno debida al peso del hormigón fresco se produce sobre un cuerpo libremente deformable y no produce tensiones.

Tampoco se considera el peso del suelo que descansa sobre la zapata..

Punzonamiento: sección referencia S_2 a trazos



Cortante: sección referencia S_3 (A-C)



Tomás Cabrera (U.P.M.)

Distribución de tensiones en el terreno (cálculo geotécnico)

Tanto para el cálculo geotécnico como para el estructural debemos conocer la distribución de tensiones en el terreno, que depende fundamentalmente del tipo de suelo y de la rigidez de la zapata.

Fácilmente se comprende que aún en el caso de **zapata rígida** con carga centrada, la distribución de tensiones no puede ser uniforme, ya que en los bordes de la misma habría un salto la ley sería discontinua.

Zapata Rígida:

Para suelos cohesivos (arcillas), la ley es como la dibujada en la **figura a**.

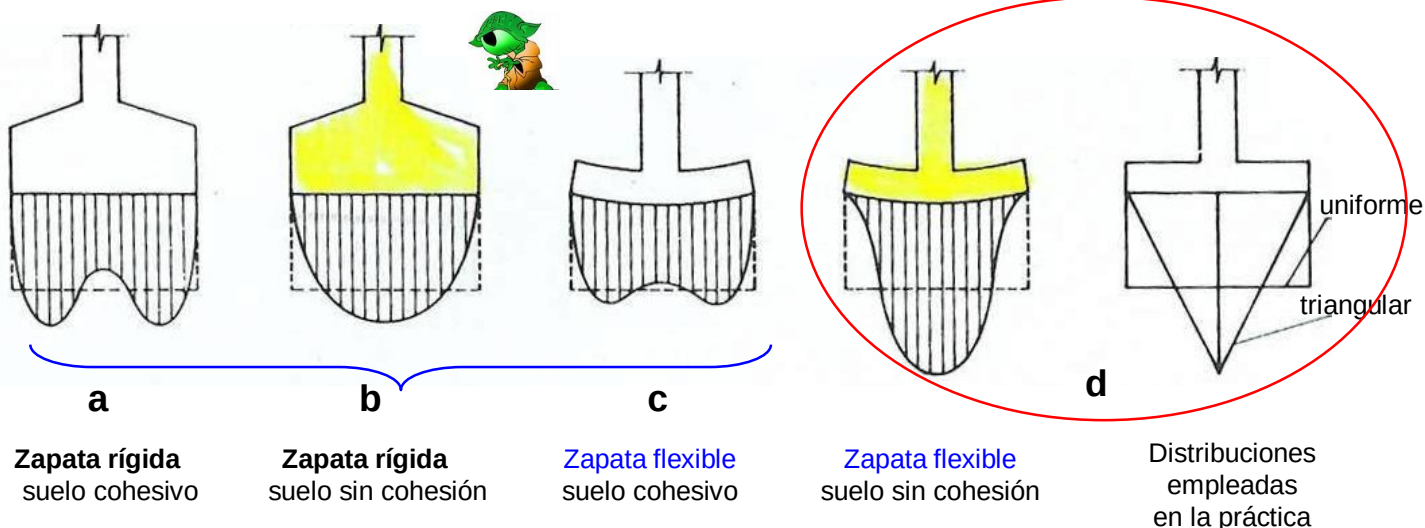
Para suelos sin cohesión (arenas), como en la **figura b**, mayor en el centro que en los bordes, debido a que el suelo situado debajo de los mismos resiste menos puesto que puede fluir lateralmente.

Zapata Flexible:

En el caso de zapata flexible, las tensiones en las proximidades de los bordes disminuyen en ambos tipos de suelo, debido a la deformación de la zapata; y aumentan , por lo tanto en el centro de las mismas

Para suelos cohesivo, **figura c**.

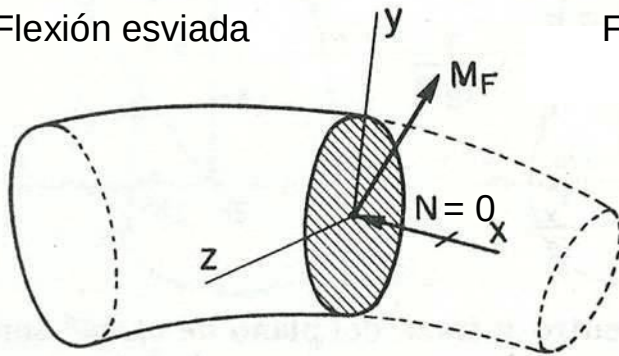
Para suelos sin cohesión, **figura d**.



Distribución de tensiones en el terreno figura tomada del M.M.M.

Teoría general Flexión compuesta

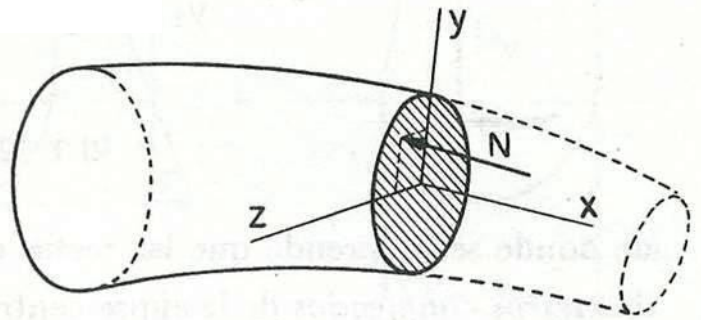
Flexión esviada



Axil " $N = 0$ "

Flector " M_F "

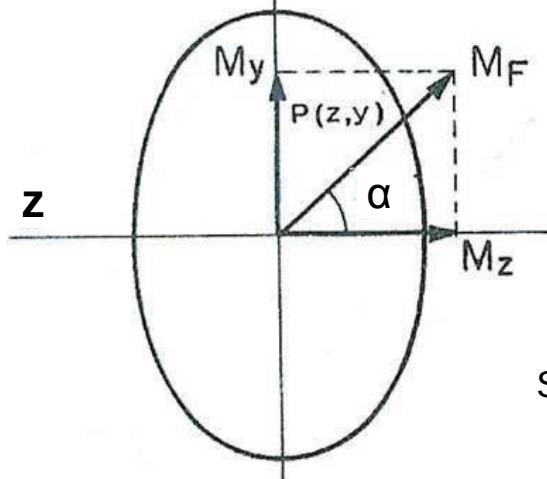
Flexión compuesta <> **Compresión compuesta**



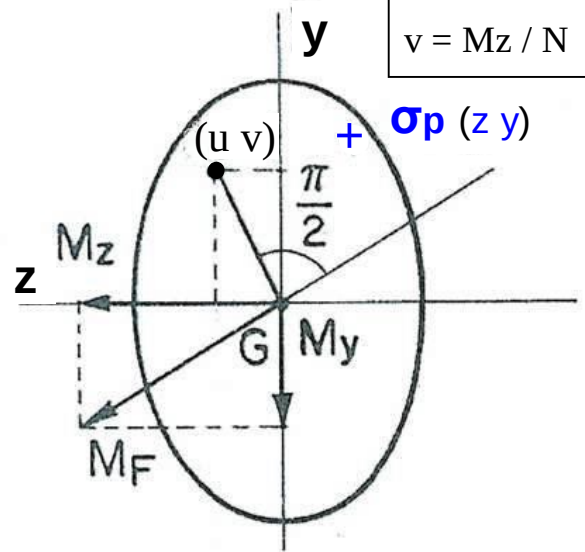
Axil " N "

con excentricidades: (u, v)

$$M_F = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$



Sección recta



$$u = M_y / N$$

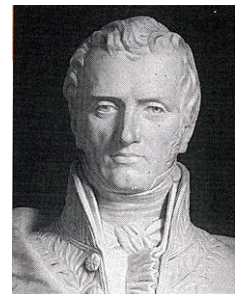
$$v = M_z / N$$

FLEXIÓN COMPUESTA (ecuación de Navier)

Cuando una sección está solicitada por un momento flector y la resultante de fuerzas (a la izquierda o a la derecha de la sección) tiene componente normal, diremos que está sometida a flexión compuesta.

Por superposición la tensión normal en un punto P (x z) será:

$$\sigma_p = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$



Claude-Louis Navier
(1785 -1836)

El eje neutro es el lugar geométrico de la sección de tensión axial nula, luego su ecuación será:

$$0 = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

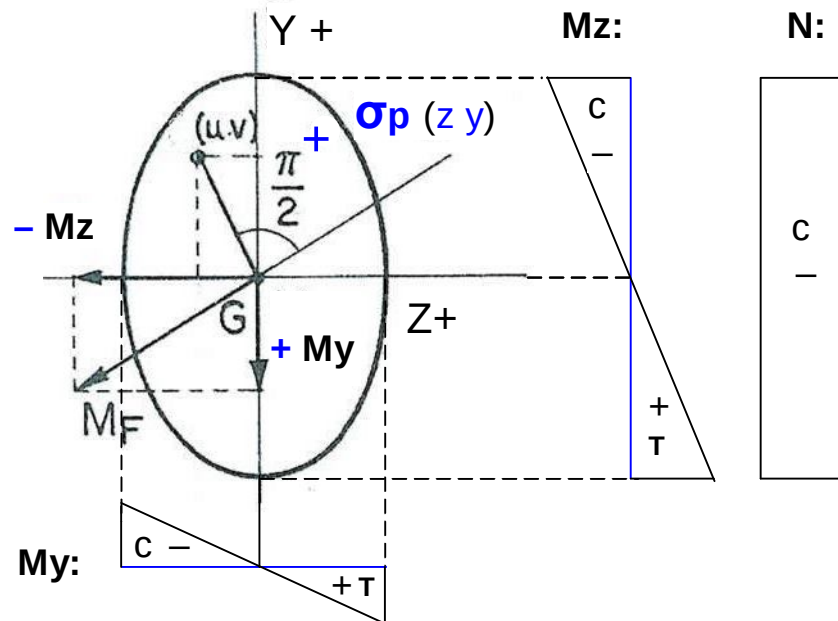
Aplicación a fuerzas axiles excéntricas

Este caso queda reducido a una resultante **N** paralela al eje x y aplicada en un punto **(u, v)**, con tal que se cumpla: **My = N * u** **Mz = N * v**

En este caso:

$$- Mz = - N * v$$

$$+ My = - N * - u$$



La tensión normal unitaria en un punto **p (z, y)**

$$\sigma p = \frac{N}{A} \pm \frac{My}{I_y} z \pm \frac{Mz}{I_z} y = \frac{N}{A} + \frac{N * u}{A * i_y^2} z + \frac{N * v}{A * i_z^2} y$$

Y +
Z +
Geometría de la sección



$$\sigma p = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{u * z}{i_y^2} + \frac{v * y}{i_z^2} \right)$$

El signo de las tensiones depende ahora sólo de N

Cuando existen tracciones + y compresiones -

En la base de las zapatas sólo existen **compresiones** y éstas tienen el signo +

La ecuación del eje neutro

$$0 = 1 + \frac{u * z}{i_y^2} + \frac{v * y}{i_z^2}$$

Que representa una recta:
(az + by + c = 0)

$$\frac{u * z}{i_y^2} + \frac{v * y}{i_z^2} = -1$$



Elipse central inercia, polo, polar y antipolar

A cada posición de **N** le corresponderá un eje neutro en función de las coordenadas de su punto de aplicación (**u,v**) llamado **Centro de Presiones**.

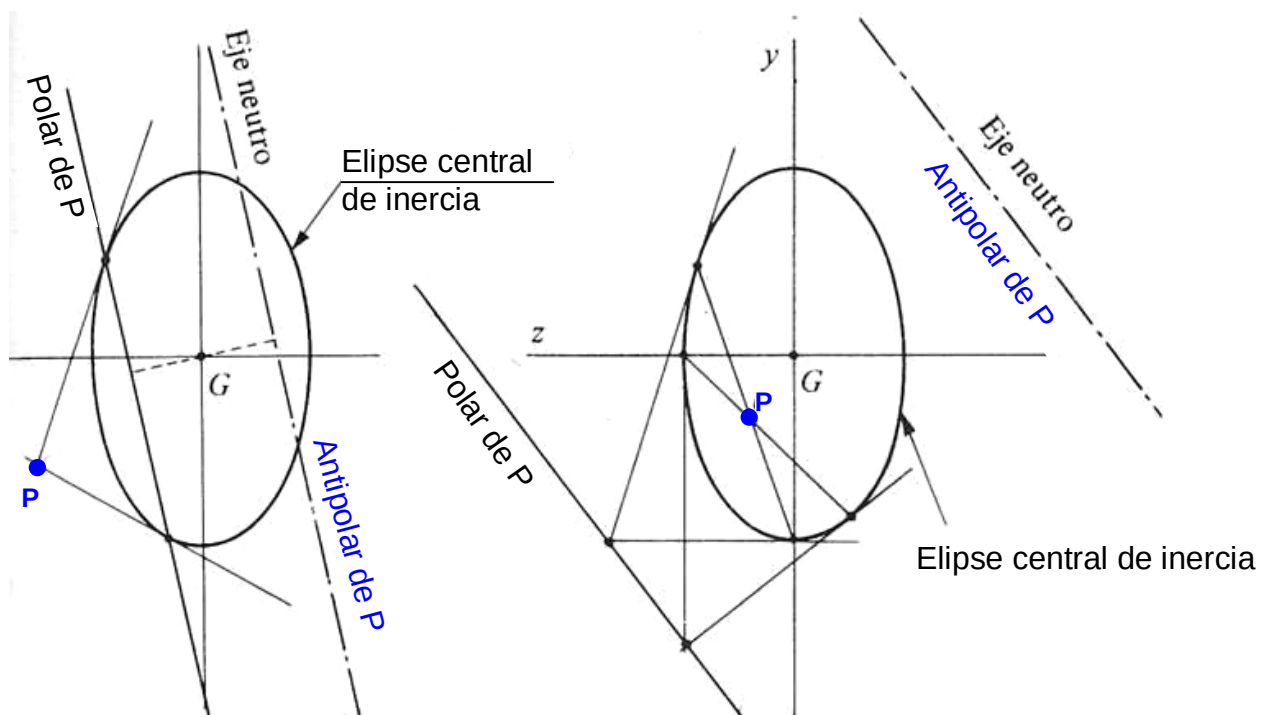
La ecuación de la elipse central de inercia es: $\frac{z^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_z^2} = 1$

La polar del centro de presiones **P (u,v)** respecto a ella es: $\frac{z^*u}{i_y^2} + \frac{y^*v}{i_z^2} = 1$

La antipolar del punto **P** (simétrica respecto del c. d. g.) es: $\frac{z^*u}{i_y^2} + \frac{y^*v}{i_z^2} = -1$

Comparando, podemos enunciar:

El eje neutro es la antipolar de centro de presiones respecto a la elipse central de inercia de la sección.



Recíprocamente el centro de presiones correspondiente a un determinado eje neutro es el antipolo de tal eje con relación a la elipse central de inercia.

Si el centro de presiones describe una recta, el eje neutro gira alrededor del antipolo de la recta.

Recíprocamente si el eje neutro gira alrededor de un punto fijo, el centro de presiones describirá la antipolar de dicho punto

Núcleo central de inercia

Para determinados materiales tiene especial interés que queden sometidas sus secciones a esfuerzos normales unitarios del mismo signo (usualmente compresión como en los terrenos).

Definiremos por tanto como **NÚCLEO CENTRAL**: El lugar geométrico de los antipolos de las rectas envolventes al recinto convexo que contiene a la sección considerada.

Gráficamente el núcleo central puede obtenerse así:

Dada una sección recta y obtenido su centro de gravedad **G**, su ejes principales y centrales **Z**, **Y** y su elipse central de inercia de semiejes **GS** y **GD**

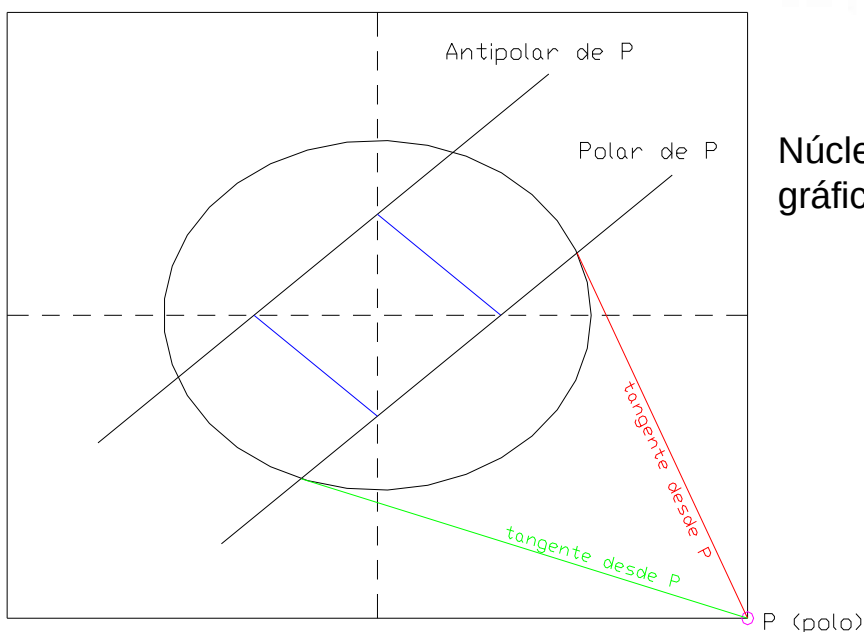
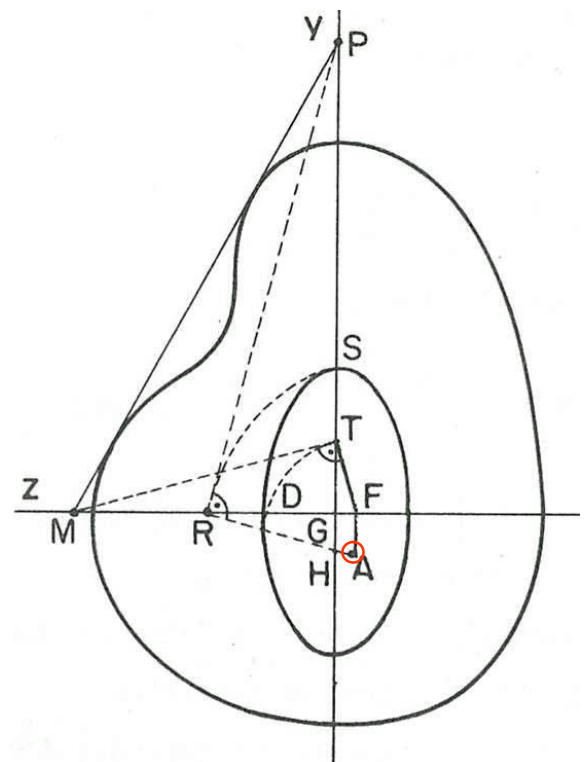
Trazada una tangente **MP** al recinto convexo que contiene la sección considerada, unimos **P** con **R** y **M** con **T**.

$$GR = GS = iz$$

$$GT = GD = iy$$

Por **T** trazamos perpendicular a **MT** y por **R** perpendicular a **RP**, las intersecciones (**F** y **H**) de dichas perpendiculares con los ejes coordenados nos definen la abscisa y ordenada respectivas del punto **A** antipolo de **MP**.

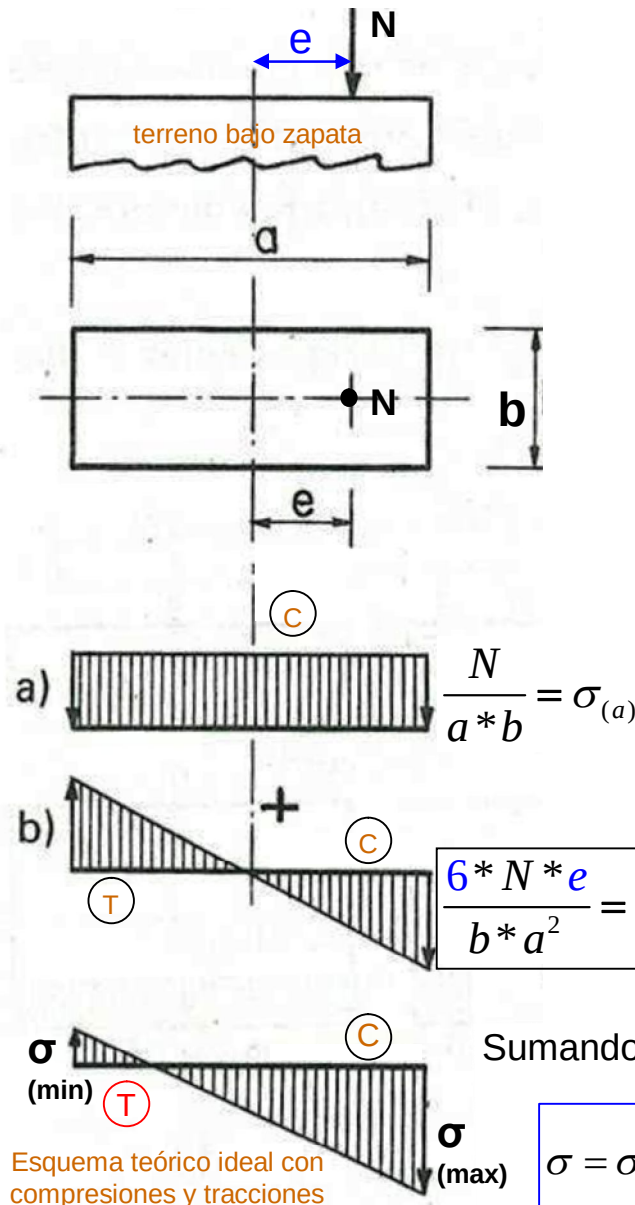
Los antipolos de las envolventes del contorno del recinto convexo que contiene la sección nos definen el contorno del núcleo central. Recíprocamente las antipolares del contorno del recinto convexo que contiene la sección son envolventes del núcleo central.



Núcleo central de inercia, de forma gráfica en una sección rectangular.

Aplicación con excentricidad única (zapatas modelo teórico).

En materiales frangibles interesa que toda la sección esté sometida a compresión. Por tanto la fuerza resultante aplicada debe actuar en el núcleo central. Como una de las secciones de uso más generalizadas es la rectangular, vamos a estudiar el comportamiento al margen de la teoría desarrollada anteriormente.



Suponemos que N es la fuerza normal que actúa sobre la sección rectangular, en un punto de uno de los ejes de simetría.

Si N actuara en el c.d.g. aportaría una compresión uniforme:

$$\sigma = N / A$$

A la que deberemos superponerle el diagrama de tensiones aportado por el momento flector

$$M = N \cdot e$$

El diagrama definitivo de tensiones tendrá una zona de tracciones y otra de compresiones.

Las tensiones en las fibras extremas son:

Ecuación fundamental de la flexión

$$\frac{Mf}{\sigma_{\max}} = \frac{I}{a/2} \rightarrow \frac{N \cdot e}{b \cdot a^3 / 12} = \frac{\sigma_{\max}}{a/2}$$

Sumando se tiene la tensión en las fibras mas alejadas

$$\sigma = \sigma_{(a)} \pm \sigma_{(b)} = \frac{N}{a \cdot b} \pm \frac{6N \cdot e}{a^2 \cdot b} = \frac{N}{a \cdot b} \left(1 \pm \frac{6e}{a} \right)$$

Comprobación tensiones en el plano cimentación muros de contención

Por tanto la excentricidad e necesaria para que la fibra neutra $\sigma = 0$ coincida con la más alejada será la que cumpla $6e/a = 1$

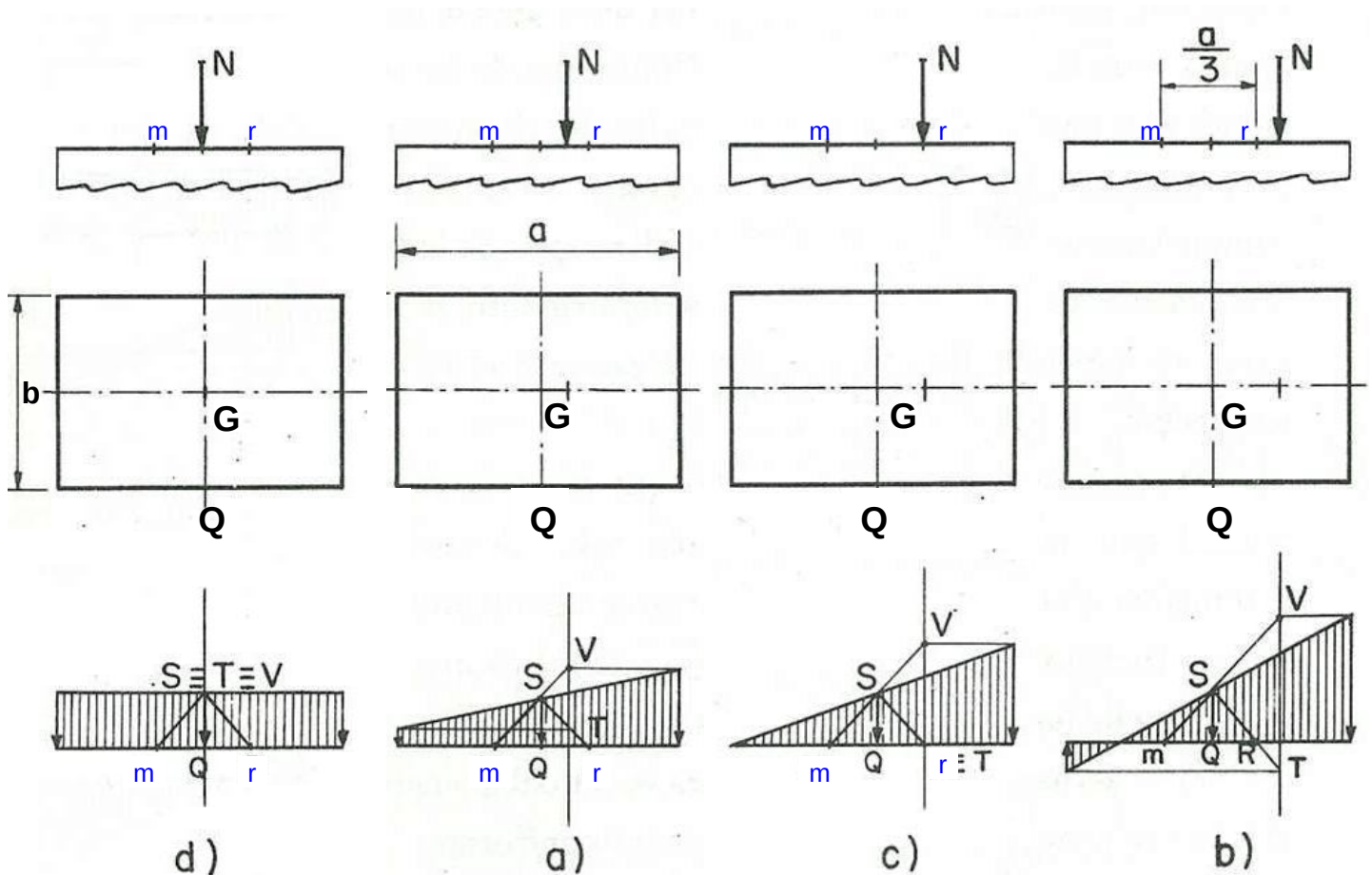
De donde: $e = a / 6$

Como dicha excentricidad podemos tomarla a la derecha e izquierda del c. d. g. la fuerza puede moverse en el tercio medio central:

$$(a/6 + a/6) = a/3 \quad (\text{Diagonal del núcleo central de inercia})$$

Procedimiento gráfico (modelo teórico con compresión y tracción)

Veamos ahora un procedimiento gráfico que nos permite representar el diagrama de tensiones unitarias.



Sobre la perpendicular a la sección considerada y por Q (proyección de G) medimos a una escala el segmento: $QS = N / ab$

Unimos S con los puntos M y R extremos del tercio medio central (vértices del núcleo central).

Las intersecciones de $m-S$ y $r-S$ respectivamente con la línea de acción de N nos dan los puntos V y T que definen el diagrama de tensiones unitarias.

En la figura se ven los cuatro casos posibles:

- a/ Fuerza dentro del núcleo central.
- b/ Fuerza fuera del núcleo central.
- c/ Fuerzan en un vértice del núcleo central
- d/ Fuerza en el c. d. g.

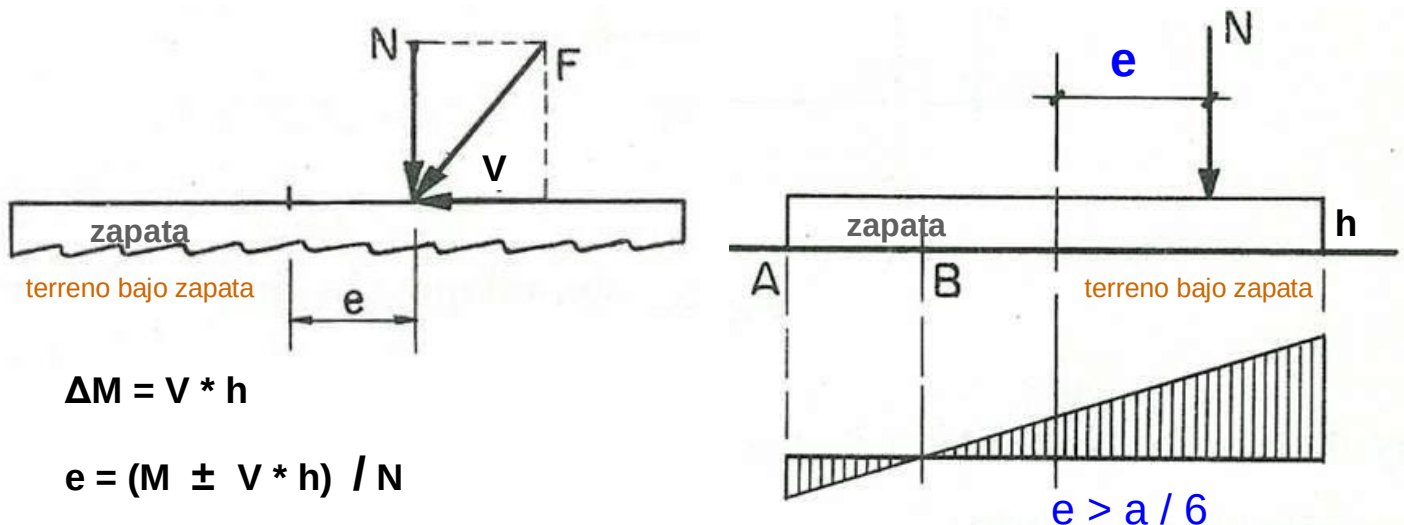
Fuerza F con dirección arbitraria o fuera núcleo central

Fuerza F con dirección arbitraria. Actuación conjunta de N y V

Si la fuerza F que actúa sobre la sección considerada no es normal a la sección, se descompone en una que si lo es N y en otra V contenida en la sección.

Consideraremos como excentricidad e la distancia entre el c.d.g. y el punto de intersección de F con la sección.

Tiene validez la construcción anterior considerando la componente N como fuerza normal. Además deberá considerarse el incremento de momento debido al cortante.



Centro de presiones exterior al núcleo central ($e > a/6$)

Cuando la fuerza normal actúa fuera del tercio medio central deben engendrarse tensiones de tracción y de compresión respectivamente. No obstante, en algunos casos no pueden manifestarse tales tracciones como por ejemplo si se trata de una zapata que se apoya simplemente en el terreno.

Evidentemente la zona **AB** teóricamente sometida a tracciones podrá, todo lo más no apoyarse sobre en el terreno pero jamás tirar de él.

Por tanto el diagrama mixto de tensiones no puede ajustarse a la realidad.

¿Cómo se resuelve el problema?

Admitamos que la distribución de tensiones sigue siendo lineal; entonces será suficiente determinar un volumen de tensiones con dos condiciones:

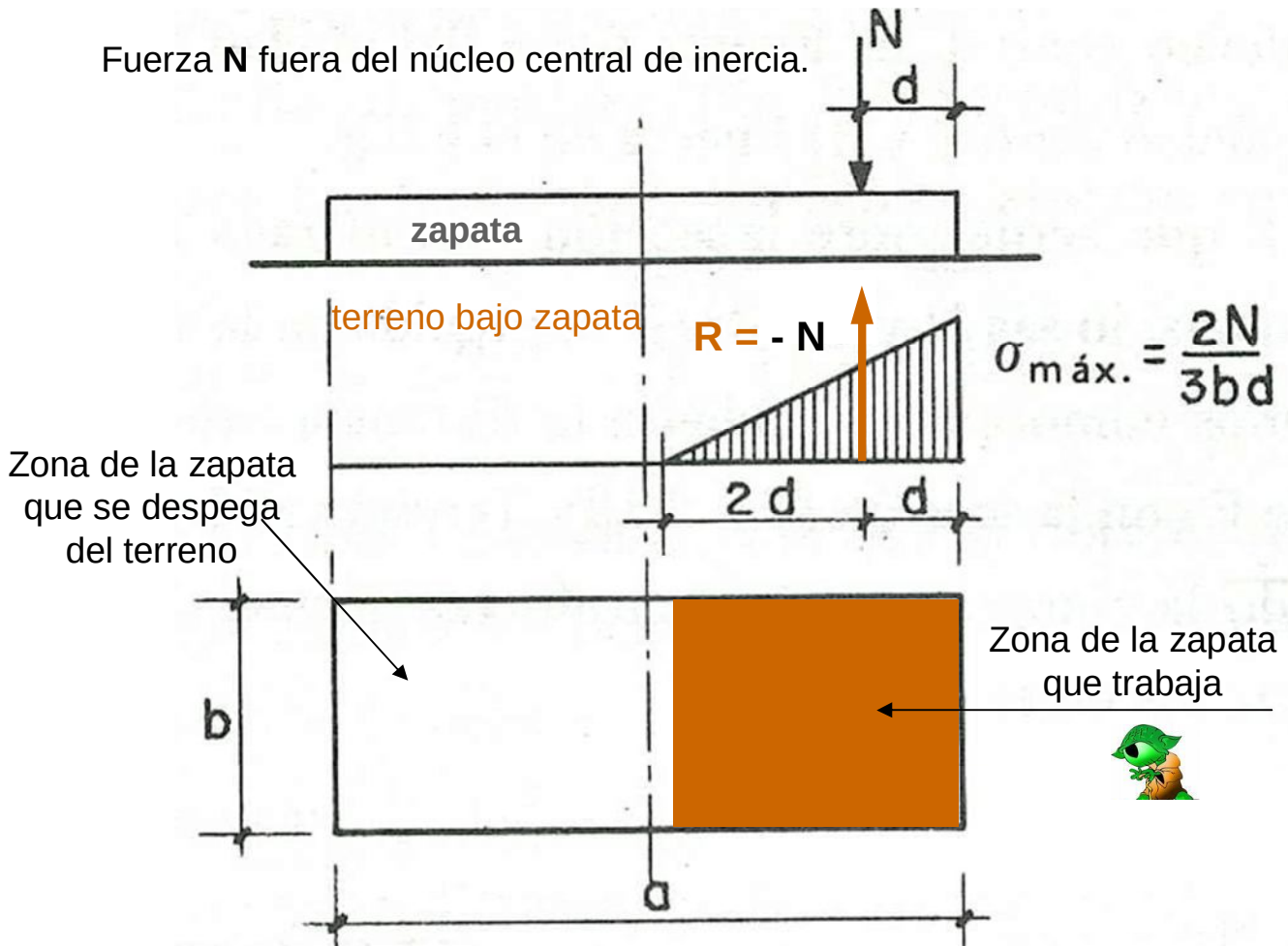
La resultante del volumen de tensiones R será igual a **N** (equilibrio de fuerzas).

Las líneas de acción de **N** y de la resultante **R = -N** de tensiones del terreno serán coincidentes (equilibrio de momentos).

Esquema real de tensiones en el terreno

Primera condición: **Equilibrio de fuerzas**: La resultante del volumen de tensiones " σ " del terreno debe ser igual a N

Segunda condición: **Equilibrio de momentos**: Las líneas de acción de N y de la reacción del terreno $R = -N$ deben ser coincidentes.



La ley de tensiones será la de la figura y la tensión axial máxima será tal que el volumen de tensiones de compresión equilibre a N , por tanto:

$$N = \frac{\sigma_{\text{máx.}} \cdot b \cdot 3d}{2}$$
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{2N}{3bd}$$

Acciones sobre las cimentaciones

El dimensionado en planta de una zapata (superficie de contacto con el terreno) depende de la distribución de presiones en dicha superficie.

Lo obtenemos a partir de las acciones que la zapata debe transmitir al terreno:

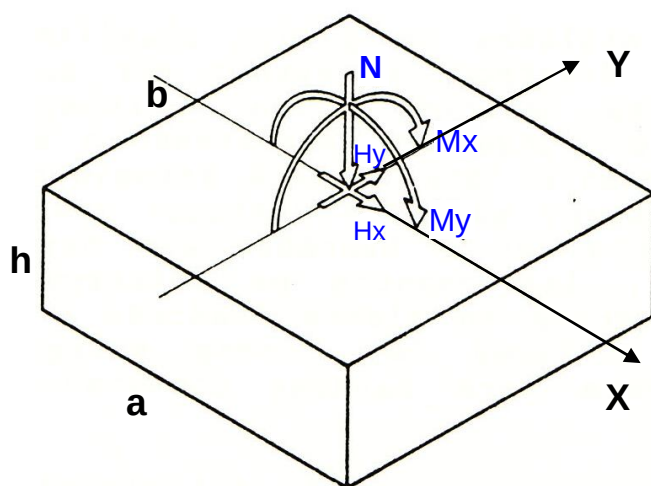
(utilizaremos a partir de ahora los ejes X e Y para los principales centrales de la zapata)

Debidas a la estructura:

a/ Esfuerzo normal **N**

b/ Momentos **Mx** **My**

c/ Cortantes: **Hx** **Hy**



C.T.E.(2006) **N** ahora es **V**

Debidas a la zapata y las tierras:

Peso propio zapata:

$$\mathbf{Pz} = a * b * h * \gamma_{\text{hormigón}}$$

Peso de las tierras sobre la zapata:

Ps

Estas acciones, por traslado vectorial a la base de la cimentación o zapata son:

- Esfuerzo normal: **N = N + Pz + Ps**

- Momentos flectores: **Mx = Mx + (Hy * h)** **My = My + (Hx * h)**

Las acciones se toman siempre SIN MAYORAR, ya que la seguridad necesaria, se introduce en la determinación de la tensión admisible del terreno.

Los esfuerzos cortantes en la base de la zapata, en general son acciones horizontales que deben ser absorbidas por rozamiento entre terreno y zapata, o bien por otro mecanismo.

Instrucción E.H.E. 08

Los elementos de cimentación se dimensionan para resistir las cargas actuantes y las reacciones inducidas. Para ello será preciso que las sollicitaciones actuantes sobre el elemento de cimentación se transmitan íntegramente al terreno o a los pilotes en que se apoya.

Para la definición de las dimensiones de la cimentación y la comprobación de las tensiones del terreno a las reacciones de los pilotes:

Se considerarán las combinaciones pésimas transmitidas por la estructura,

teniendo en cuenta los efectos de segundo orden en el caso de soportes esbeltos, el peso propio del elemento de cimentación y el del terreno que gravita sobre él, todos ellos con sus valores característicos

Zapatas rectangulares, caso general o bidimensional

Cuando se va realizar el dimensionado en planta del cimiento, puede no estar determinado el cando h de la zapata, se toma, en casos normales como peso propio de la zapata un tanto por ciento de la carga N .

$$\text{Superficie zapata} = a * b = \frac{N(1 + \beta)}{\sigma_{adm}}$$

$$\text{con } \beta = \frac{14 - 0,02\sigma_{adm}}{100}$$

σ_{adm} en kN/m^2 (1 kp/cm^2) = 100 kN/m^2)

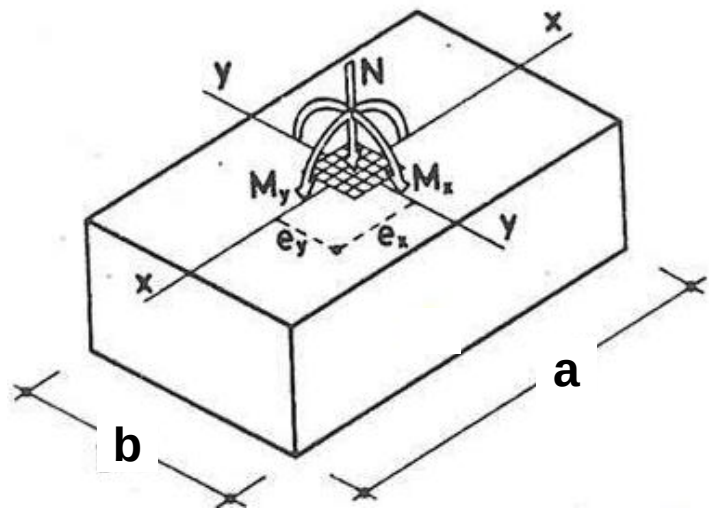
(tomada del M.M.M.)

Las tensiones en cada punto de la zapata en contacto con el terreno, vendrán dadas por la ecuación de flexión compuesta

$$\sigma_p = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

Llamando

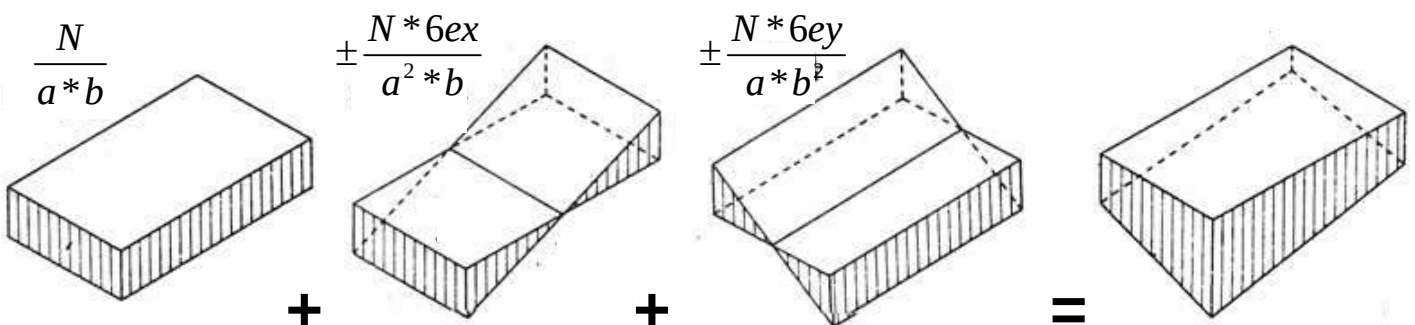
$$e_x = \frac{M_y}{N} \quad e_y = \frac{M_x}{N}$$



Las tensiones extremas serán:

$$\sigma_p = \frac{N}{a * b} \pm \frac{N * 6e_x}{a^2 * b} \pm \frac{N * 6e_y}{a * b^2}$$

$$\sigma_p = \frac{N}{a * b} \left(1 \pm \frac{6e_x}{a} \pm \frac{6e_y}{b} \right)$$



Superposición de los diagramas de tensiones

Cargas excéntricas

Cuando la actuación de las cargas sobre el cimiento produzca, por su excentricidad, presiones no uniformes sobre el terreno, se admitirá en los bordes un aumento de 25% (método tradicional) siempre que la presión en el centro de gravedad de la zapata no exceda de la presión admisible, es decir:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{a \cdot b} \left(1 \pm \frac{6ex}{a} \pm \frac{6ey}{b} \right) \leq 1,25 \sigma_{adm}.$$



Siempre que: $\sigma_{c.d.g.} = \frac{N}{a \cdot b} \leq \sigma_{adm}.$

CTE

$$Rd = q_{adm} = \frac{q_h}{\gamma_R} = \frac{q_h}{3}$$

R = resistencia terreno

q_{adm} = presión admisible

q_h = presión hundimiento

γ_R = coeficiente seguridad

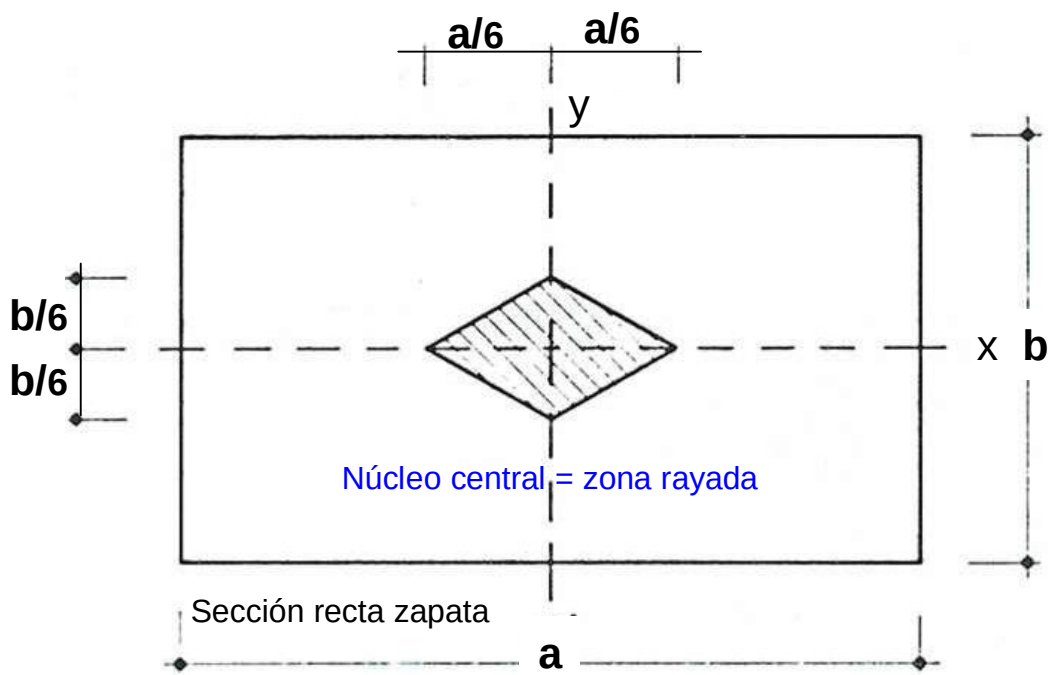
(Nota: El factor 1,25 se recogía hasta la derogada NBE-AE.88)

Si alguno de los valores de las tensiones extremas, se hiciese negativo implicaría que se producen tracciones entre la zapata y el terreno, lo cual implicaría la separación entre la zapata y el terreno.

Esta limitación acota el campo de aplicación y validez de la fórmula general de flexión compuesta.

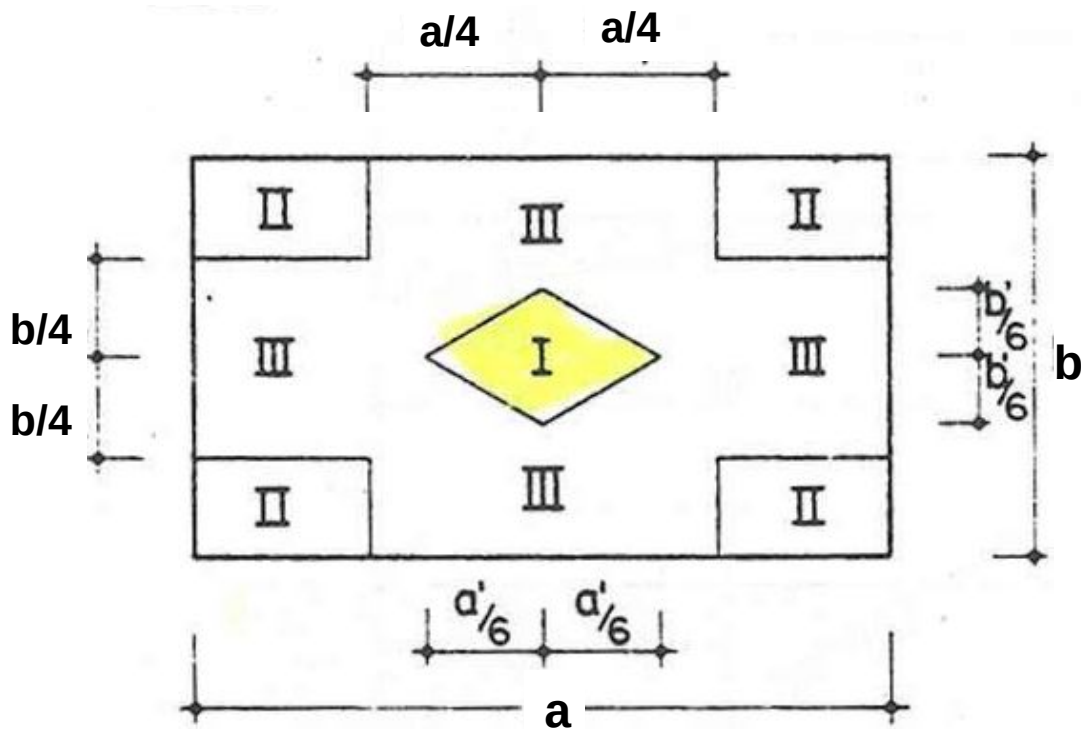
Para que sea aplicable la fórmula general, la carga tiene que estar situada dentro del núcleo central de inercia de la sección.

Las excentricidades deben cumplir: $\frac{6ex}{a} + \frac{6ey}{b} \leq 1$



Centro de presiones c.d.p. (zonas posibles)

Dividimos la base de la zapata en tres zonas de actuación posible de **N**, ver gráfico



Zona I

$$\frac{6ex}{a} + \frac{6ey}{b} \leq 1$$



La carga **N** actúa dentro del núcleo central de inercia.

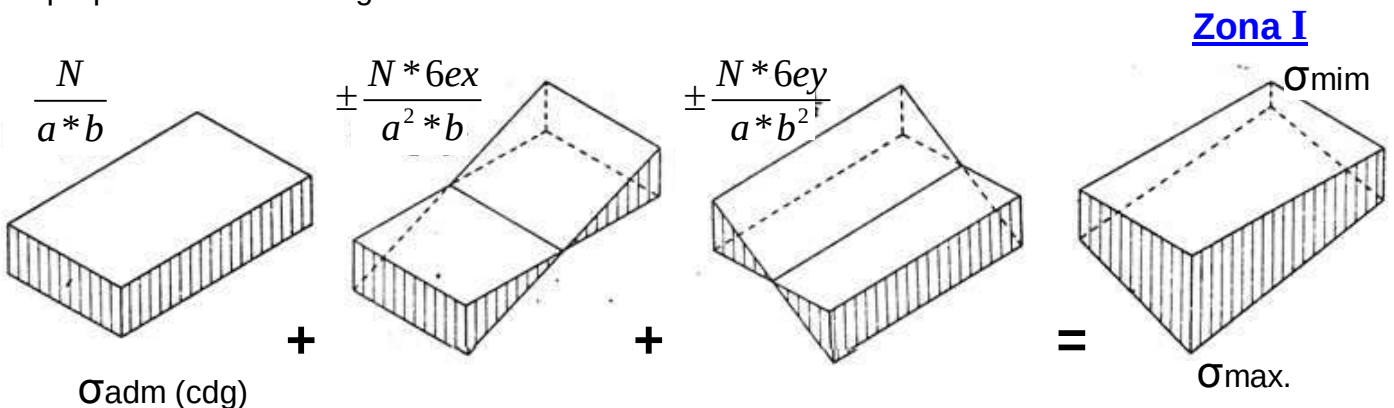
Todos los puntos la zapata están sometidos a tensiones de compresión

Se aplica sin limitaciones la fórmula general de la flexión compuesta.

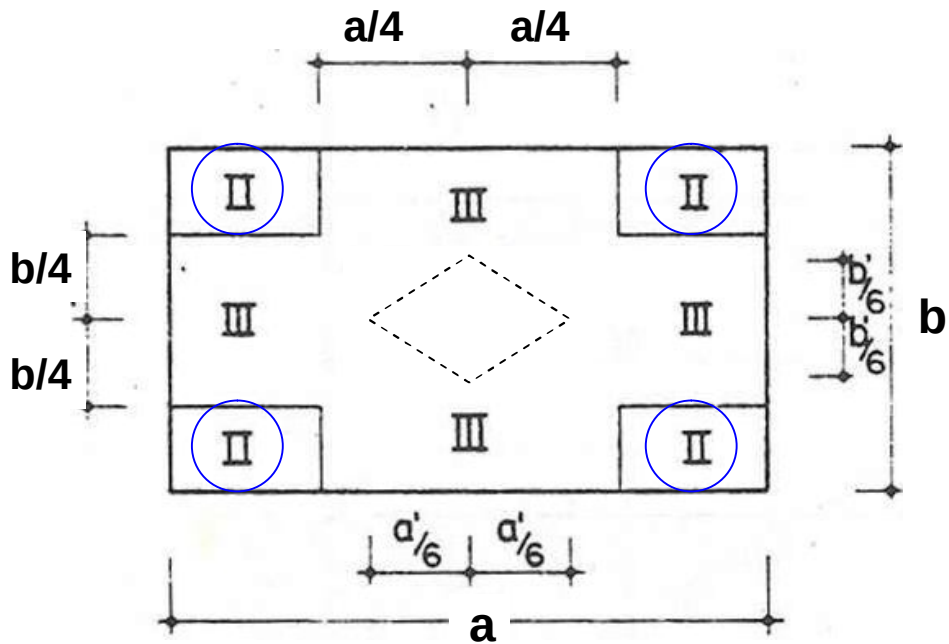
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{a*b} \left(1 + \frac{6ex}{a} + \frac{6ey}{b} \right) \leq 1,25\sigma_{adm}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{a*b} \left(1 - \frac{6ex}{a} - \frac{6ey}{b} \right) \geq 0$$

Superposición de los diagramas de tensiones



Zonas II



Zonas II

$$\frac{6ex}{a} + \frac{6ey}{b} > 1$$

Condición 1ª

La carga **N** actúa muy fuera del núcleo central de inercia.

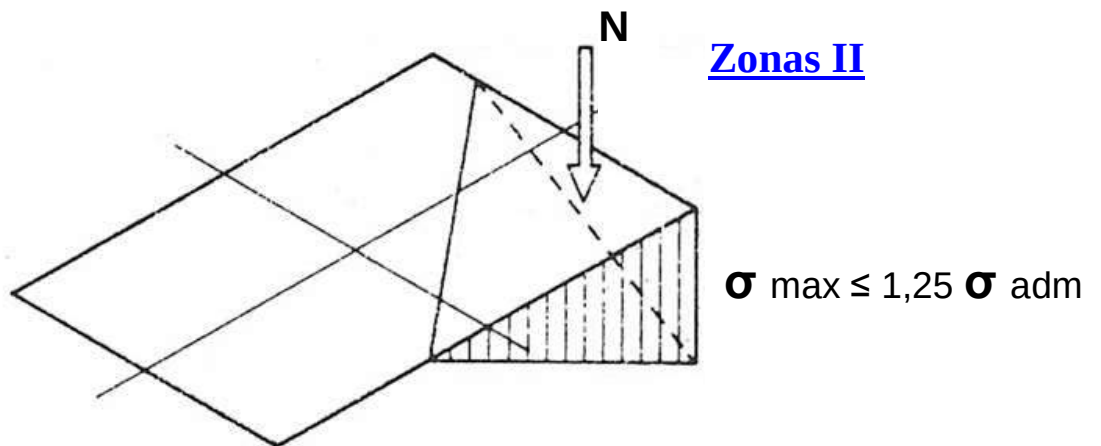
Las excentricidades deberán cumplir simultáneamente las dos:

$$ex \geq \frac{a}{4} \quad ey \geq \frac{b}{4}$$

Condición 2ª

Sólo una esquina de la zapata está sometida a tensiones de compresión.

La cuña de presiones tiene forma piramidal.

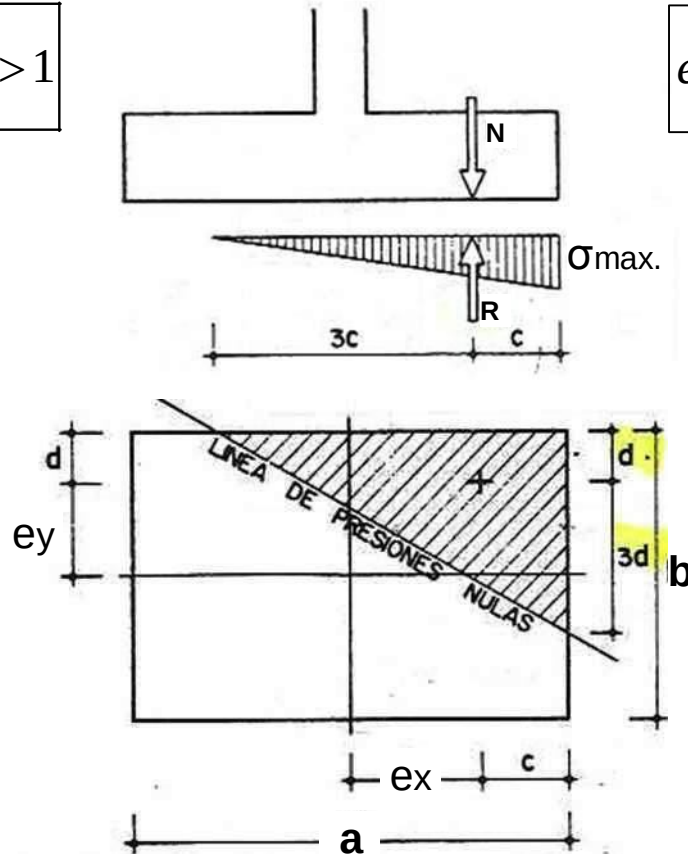


No se puede aplicar la fórmula general de la flexión compuesta.

Zona II (la cuña de presiones es piramidal)

$$\frac{6ex}{a} + \frac{6ey}{b} > 1$$

$$ex \geq \frac{a}{4} \quad ey \geq \frac{b}{4}$$



denominando:

$$\frac{a}{2} = ex + c \quad y \quad \frac{b}{2} = ey + d$$

Estableciendo el equilibrio de momentos: **N y R deben ser colineales** (el c.d.g. de una pirámide es geoméricamente conocido).

Estableciendo el equilibrio de fuerzas: **N = R** = (volumen de tensiones piramidal)

$$N = -R = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} 4c * 4d \right) \sigma \max$$

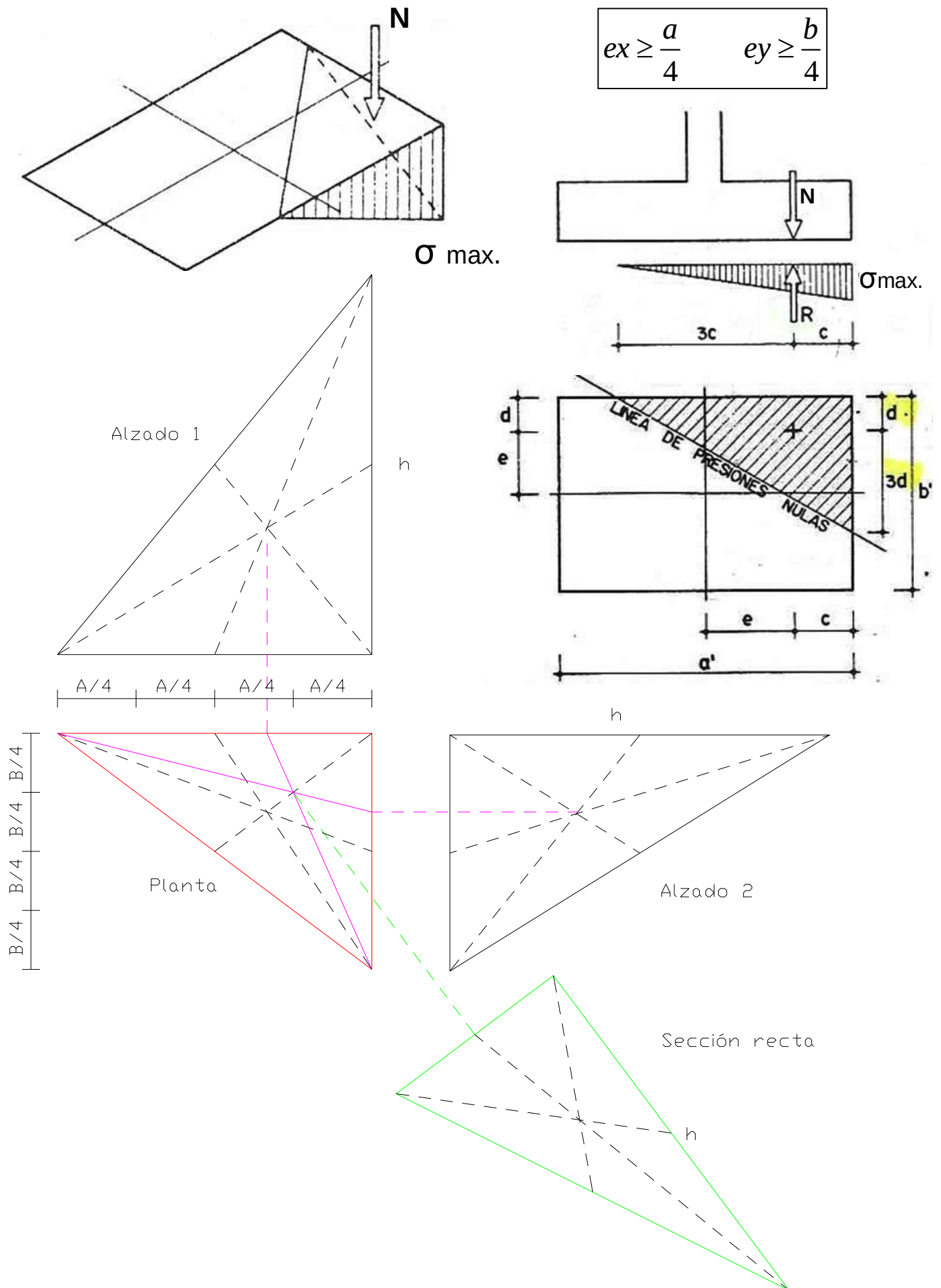
Despejando **σ max**. La tensión máxima de compresión en el terreno es:

$$\sigma \max = \frac{3}{2} \left(\frac{N}{(a - 2ex) * (b - 2ey)} \right) \leq 1,25 \sigma adm$$

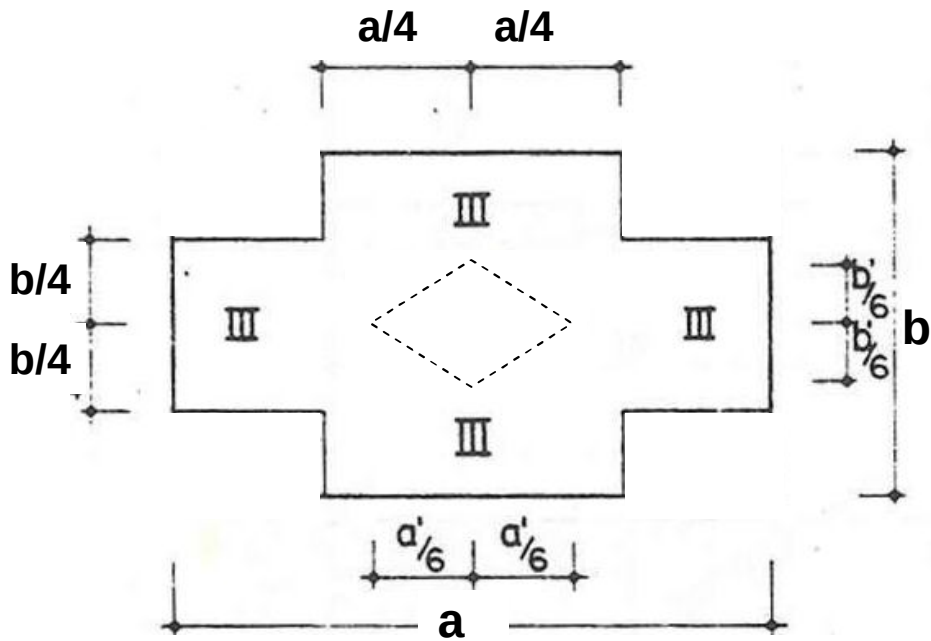
La posición de la fibra neutra o línea de presiones nula queda así determinada:

$$4c = 2(a - 2ex) \quad 4d = 2(b - 2ey)$$

Zona II (c.d.g. de la cuña de presiones piramidal)



Zona III



1º En esta zona III, los valores absolutos de las excentricidades deben cumplir:

$$\frac{6ex}{a} + \frac{6ey}{b} > 1$$

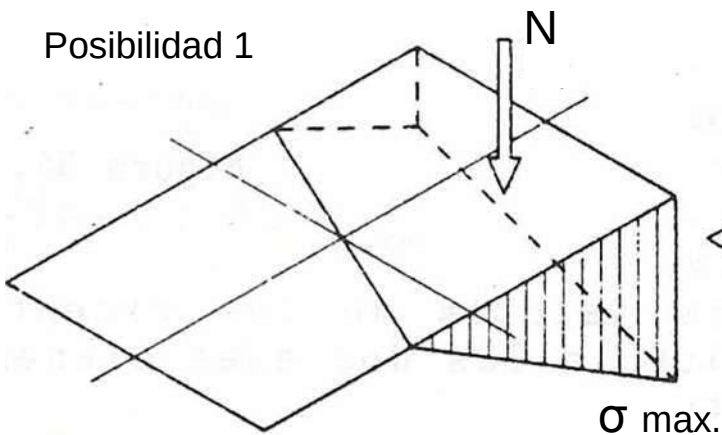
Condición 1ª

2º Además deben cumplir que **no sean simultáneamente**

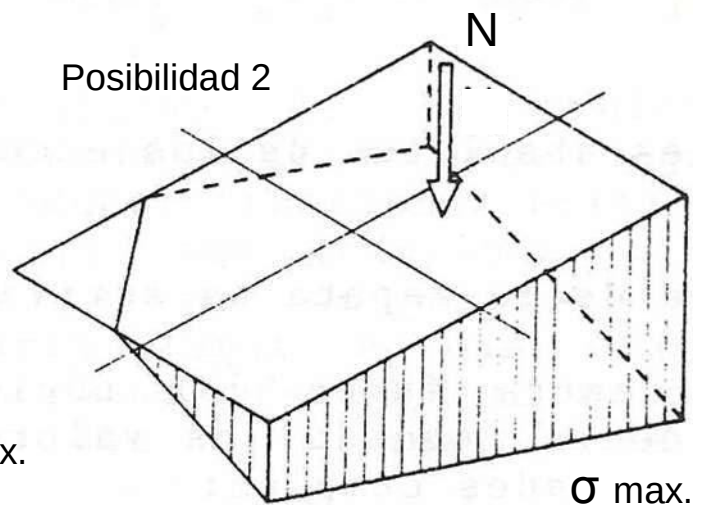
$$ex > \frac{a}{4} \quad y \quad ey > \frac{b}{4}$$

Condición 2ª

Zona III a



Zona III b



Para el cálculo de la tensión máxima y de la posición de la línea neutra se han obtenido diversas soluciones gráficamente, que se dan en forma de tablas o ábacos.

Ábacos de Plock

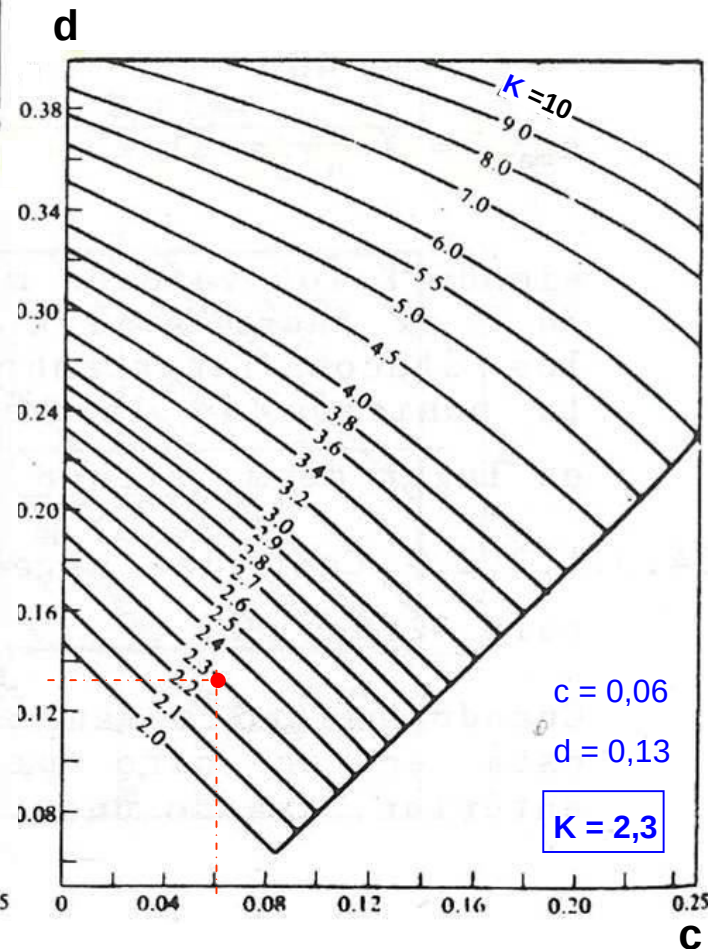
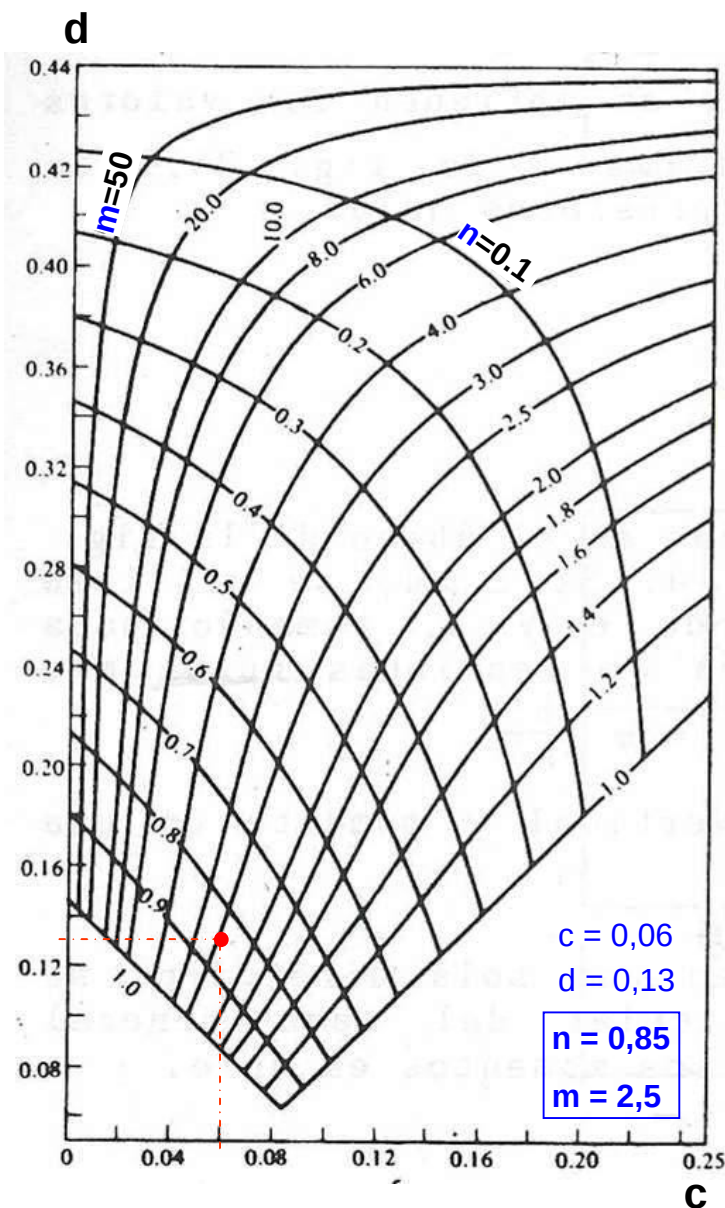
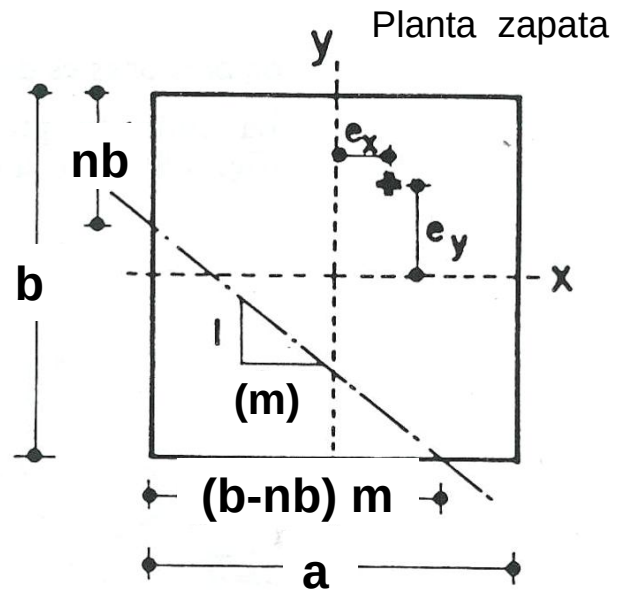
Para el cálculo de la tensión máxima y la posición de la fibra neutra se puede utilizar los ábacos de H. J. Plock 1963

Debe cumplirse que no sean simultáneamente:

$$ex > \frac{a}{4} \quad y \quad ey > \frac{b}{4}$$

En los ábacos de Plock: $d > c$

$$c = \frac{ex}{a} \quad y \quad d = \frac{ey}{b}$$



Con $d > c$ $\sigma_{\max} = k * \frac{N}{a * b} \leq 1,25 \sigma_{\max}$.

Entrando en el ábaco de la izquierda, con los valores c y d se obtienen n y m

Ejemplo uso ábacos de Plock

Datos: $a = 4 \text{ m}$ $b = 3 \text{ m}$ $e_x = +24,4\text{cm}$ $e_y = +40\text{cm}$ $N = 2250 \text{ kN}$ $\sigma_{adm} = 2,5 \text{ daN/cm}^2$

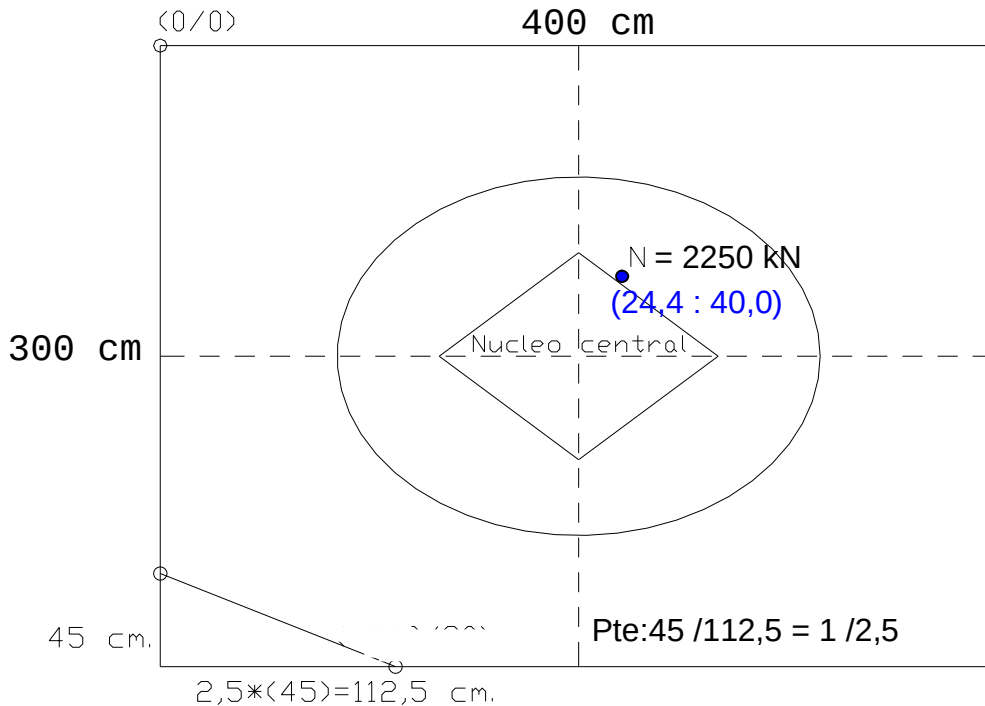
$$(24,4 / 400) = 0,061 \quad (40,0 / 300) = 0,133$$

Línea neutra ($d > c$)

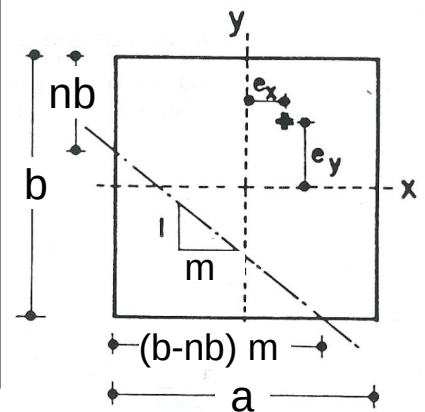
$$\left. \begin{array}{l} c = 0,061 \\ d = 0,133 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} n = 0,85 \\ m = 2,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} nb = 0,85 * 300 = 255 \text{ cm} \\ (b - nb) m = (300 - 255) * 2,5 = 112,5 \text{ cm} \end{array}$$

σ_{max} . ($d > c$)

$$\left. \begin{array}{l} c = 0,061 \\ d = 0,133 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} k = 2,3 \end{array} \right\}$$



$$c = \frac{e_x}{a} \quad y \quad d = \frac{e_y}{b}$$



Condición de seguridad. Las tensiones son admisibles si: $\sigma_{max} = k * \frac{N}{a * b} \leq 1,25 \sigma_{adm}$

$$\sigma_{max} = 2,3 * \frac{2250 *}{3 * 4} = 431,25 \text{ kN / m}^2 > 1,25 \sigma_{adm} = 1,25 * 250 = 312,5 \text{ kN / m}^2$$

El ábaco está preparado para un centro de presiones en el primer cuadrante.

La esquina de referencia de la zapata para medir $n * b$ es la superior izquierda y la pendiente:

Otros casos:

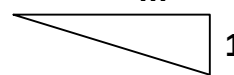
Si el centro de presiones está en el 2º cuadrante

Esquina referencia: superior derecha y la pte



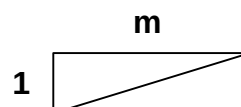
Si el centro de presiones está en el 3º cuadrante

Esquina de referencia: inferior derecha y la pte



Si el centro de presiones está en el 4º cuadrante

Esquina de referencia: inferior izquierda y la pte



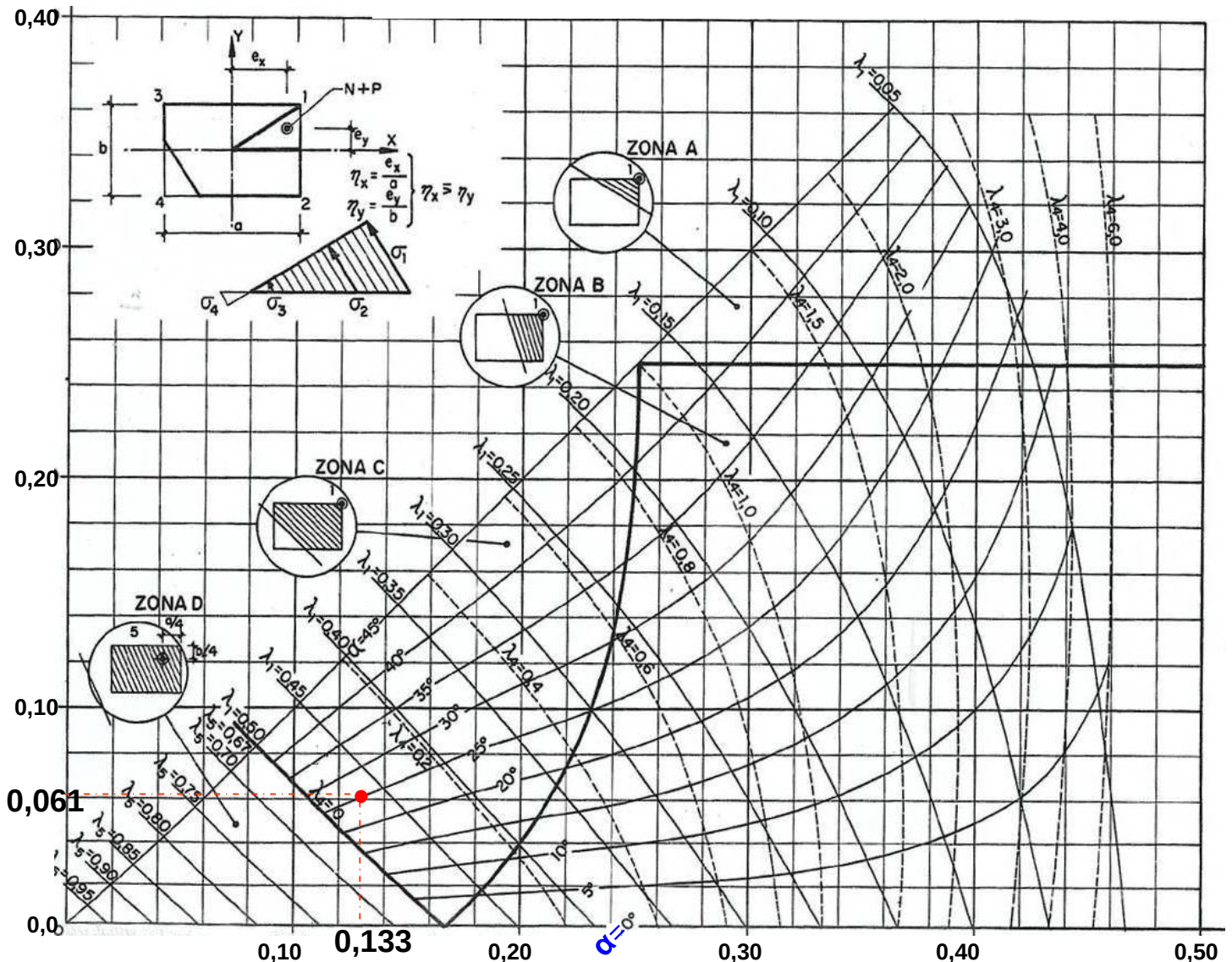
Si $c > d$, girar la sección 90º

Ábaco del M.M.M.

Zapatas rectangulares rígidas con carga biexcéntrica (comprobación de tensiones de borde)

Se entra en el ábaco con las excentricidades relativas: $\eta_x = e_x/a$ $\eta_y = e_y/b$ con ($\eta_x > \eta_y$)

η_y **Ejemplo:** $\eta_x = 0,133$ $\eta_y = 0,061 \rightarrow$ Zona C: $\lambda_1 = 0,47 \rightarrow \sigma_1 = 4 \text{ daN/cm}^2$



Si el punto cae en la zona **D**, toda la base está comprimida y la comprobación se reduce a calcular la presión en un punto 5 equidistante del centro y de la esquina más comprimida:

η_x

ZONAS A-B-C (TENSIONES BAJO LAS ESQUINAS)

$$\sigma_1 = \frac{N + P}{\lambda_1 * a * b} \leq 1,25 \sigma_{adm.}$$

$$\sigma_4 = -\lambda_4 \sigma_1 \text{ (ficticio)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_4) \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_4) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

Información adicional

$$\sigma_1 = \frac{2250 * 10^3}{0,47 * 4 * 3} = 398,4 \text{ kN / m}^2 \geq 1,25 \sigma_{adm}$$

ZONA D

(TENSION EN UN PUNTO INTERNO 5)

$$\sigma_5 = \frac{N + P}{\lambda_5 * a * b} \leq \sigma_{adm.}$$

Del libro: Hormigón Armado de P. Jiménez Montoya (M.M.M.) para zapatas rígidas.

Comprobación al vuelco y deslizamiento

En general en la base del pilar tendremos una carga axial **N** un cortante **Hx** otro cortante **Hy** y unos momento flectores **Mx My**.

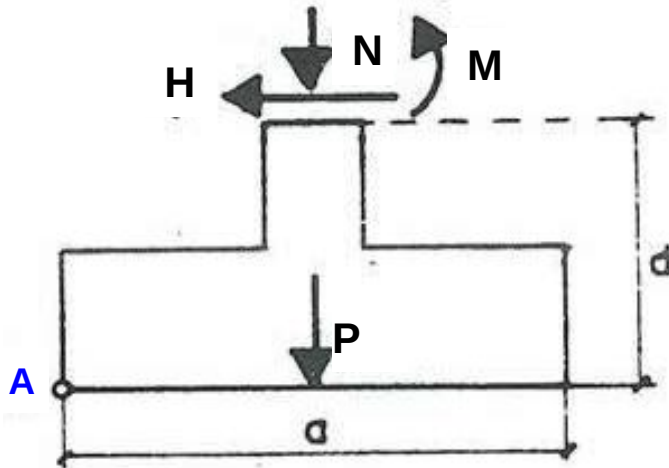
Se ha de comprobar los dos Estados Límite Últimos de vuelco y deslizamiento.

E.LU. vuelco:

Para cada dirección en el punto **A**:

P= peso propio zapata.

$$0,9 * (N + P) * \frac{a}{2} \geq 1,8 * (M + H * d)$$



En la ecuación no se incluye el peso propio del suelo sobre la zapata por ser favorable.

E.L.U. deslizamiento:

CTE Con un modelo de rotura Mohr-Coulomb: $\tau = a' + \sigma * tg \delta'$

Además, si la zapata no va arriostrada y hay acciones horizontales, hay que comprobar la seguridad al deslizamiento. Como fuerza estabilizante se cuenta sólo con el rozamiento entre la base de la zapata y el terreno, o con la cohesión si se trata de terrenos cohesivos. La ecuación es la siguiente:

Para suelos sin cohesión (**arenas**): $(N + P) \tan \delta' \geq 1,5H$

$$a' = 0 \quad \delta' = 3/4\Phi$$

Para suelos cohesivos (**arcillas**) sin drenaje: $a * b * a' \geq 1,5H$

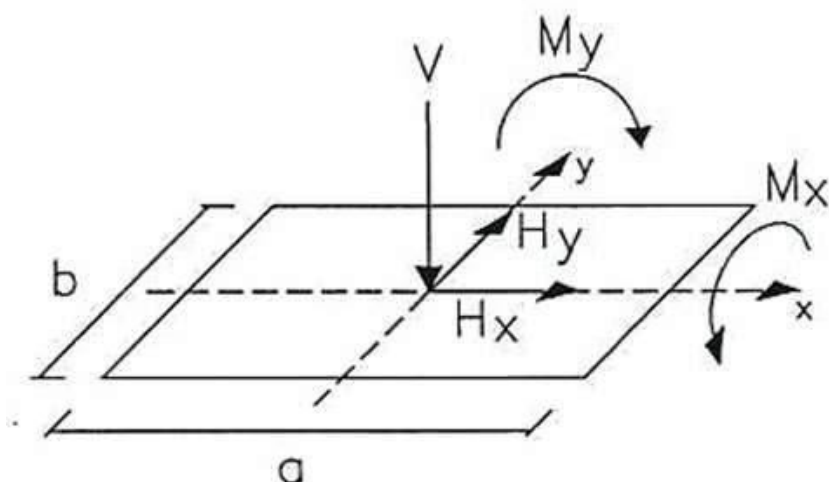
$$a' = c_u \quad \delta' = 0$$

Para suelos cohesivos (**arcillas**) con drenaje: $(N + P) * \tan \delta' \geq 1,5H$

$$a' = 0 \quad \delta' = 3/4\Phi$$

Ejemplo Peritación: Reacciones del terreno bajo una zapata aislada

Sobre una zapata de hormigón armado con medidas según figura adjunta, se tienen las siguientes 4 hipótesis de carga mas desfavorables (sin mayorar) referidas a la cara superior de la zapata



$$a = 4\text{ m.}$$

$$b = 3\text{ m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma_{\text{hormigón}} = 25\text{ kN/m}^3$$

Criterio de signos de fuerzas y momentos: + para las indicados en la figura.

Cuadro resumen de hipótesis:

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H_x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H_y (Kn)	MOMENTO M_x (m kN)	MOMENTO M_y (m kN)
I	1800	100	200	-200	200
II	1800	500	-----	-----	800
III	1800	100	200	-600	400
IV	1800	550	200	-1500	1500

Para cada una de las hipótesis se pide:

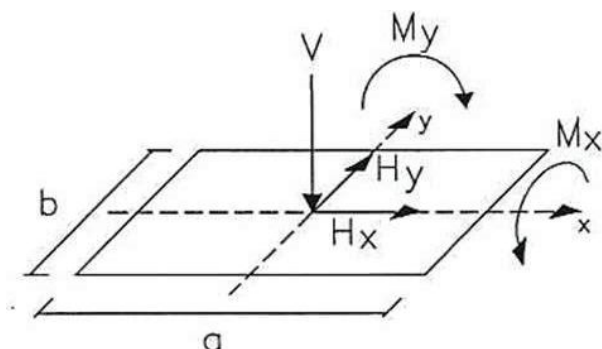
9.1/ Determinar el valor de la resultante y su punto de aplicación referida al plano de apoyo de la zapata.

9.2/ Distribución de tensiones en la base de la zapata. Comprobar si las tensiones resultantes son validas para una $\sigma_{adm} = 250\text{ kN/m}^2$.

9.3/ Si el terreno de apoyo es granular, $c' = 0,0\text{ kN/m}^2$ y $\phi' = 30^\circ$. Comprobar si los esfuerzos horizontales pueden ser contrarrestados por rozamiento.

Se van a resolver los casos correspondientes a las hipótesis I y II quedando los restantes para la práctica nº 8

1º/ HIPÓTESIS I. Resultante y punto de aplicación:



$$a = 4\text{ m.}$$

$$b = 3\text{ m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma_{\text{hormigón}} = 25\text{ kN/m}^3$$

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H_x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H_y (Kn)	MOMENTO M_x (m kN)	MOMENTO M_y (m kN)
I	1800	100	200	-200	200
II	1800	500	-----	-----	800
III	1800	100	200	-600	400
IV	1800	550	200	-1500	1500

Hipótesis I:

Peso zapata $P = 4 * 3 * 1,5 * 25 = 450\text{ kN. (45 t)}$

Traslado al plano de contacto zapata-terreno

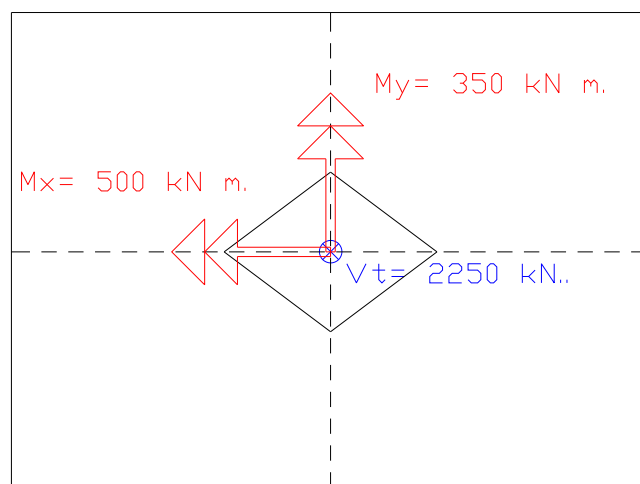
Axil: $V_t = 1800 + 450 = 2250\text{ kN. (225 t)}$

Cortante en x : $H_x = 100\text{ kN. (10 t)}$

Cortante en y : $H_y = 200\text{ kN. (20 t)}$

Momento flector en x: $M_{fx} = -200 - (200 * 1,5) = -500\text{ m. kN. (-50 mt.)}$

Momento flector en y: $M_{fy} = 200 + (100 * 1,5) = 350\text{ m. kN. (35 mt.)}$



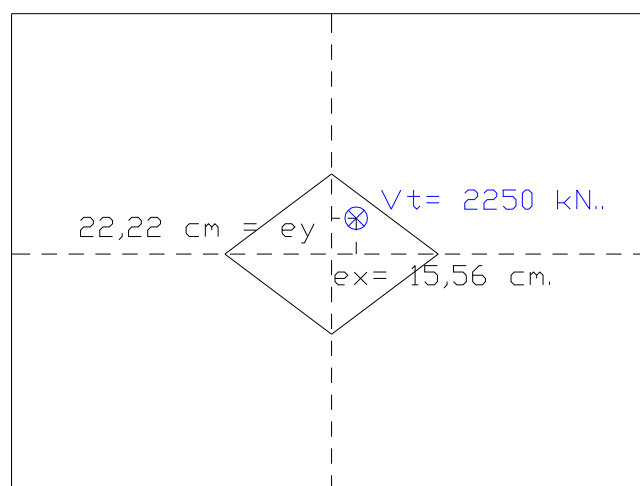
Excentricidad en x: $e_x = 350 / 2250 = 0,156\text{ m.}$

Excentricidad en y: $e_y = 500 / 2250 = 0,222\text{ m}$

Núcleo central

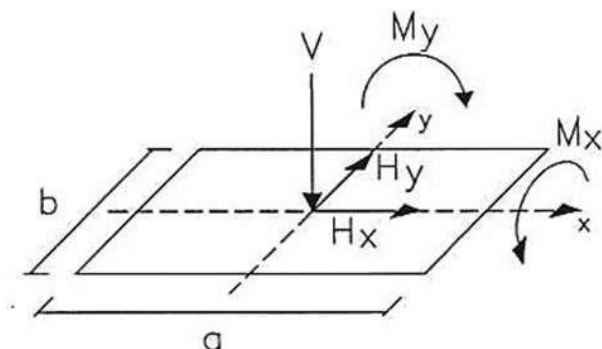
$$4/6 = 0,666\text{ m.}$$

$$3/6 = 0,5\text{ m}$$



ZONA I

HIPÓTESIS II. Resultante y punto de paso:



$$a = 4\text{ m.}$$

$$b = 3\text{ m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma \text{ hormigón} = 25\text{ kN/m}^3$$

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H _x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H _y (Kn)	MOMENTO M _x (m kN)	MOMENTO M _y (m kN)
I	1800	100	200	-200	200
II	1800	500	-----	-----	800
III	1800	100	200	-600	400
IV	1800	550	200	-1500	1500

Hipótesis II:

Peso zapata $P = 4 * 3 * 1,5 * 25 = 450\text{ kN. (45 t)}$

Traslado al plano de contacto zapata-terreno

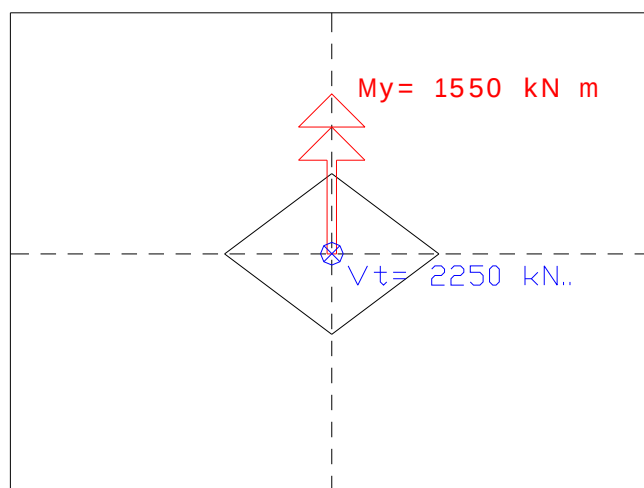
Axil: $V_t = 1800 + 450 = 2250\text{ kN. (225 t)}$

Cortante en x : $H_x = 500\text{ kN. (50 t)}$

Cortante en y : $H_y = 0\text{ kN. (0 t)}$

Momento flector en x: $M_{fx} = 0 - (0 * 1,5) = 0\text{ m. kN. (0 mt.)}$

Momento flector en y: $M_{fy} = 800 + (500 * 1,5) = 1550\text{ m. kN. (155 mt.)}$



Excentricidad en x: $e_x = 1550 / 2250 = 0,6889\text{ m.}$

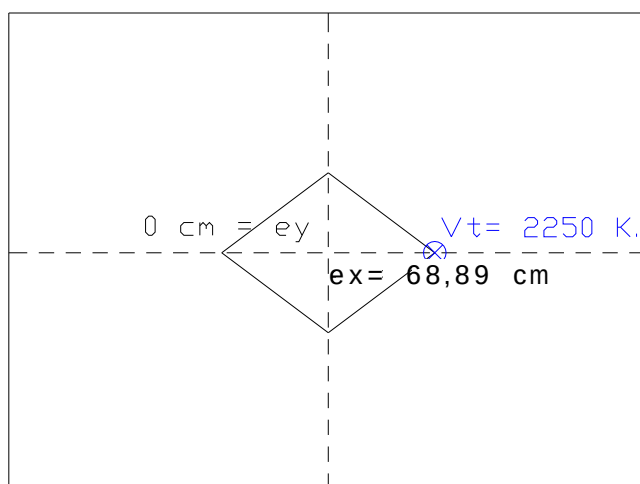
Excentricidad en y: $e_y = 0 / 2250 = 0\text{ m}$

Núcleo central

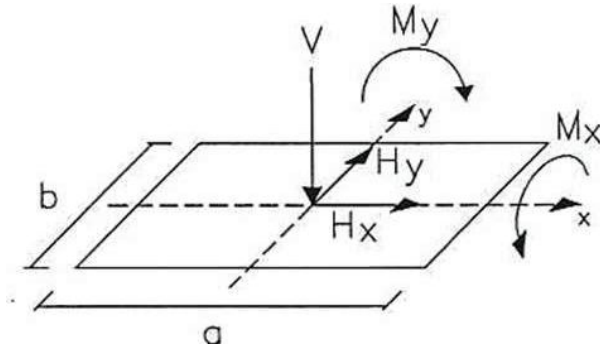
$4/6 = 0,666\text{ m.}$

Prácticamente en el borde del núcleo

Fuerza fuera del Núcleo Central: ZONA III



Resultante y punto de paso: HIPÓTESIS III



$$a = 4\text{ m.}$$

$$b = 3\text{ m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma \text{ hormigón} = 25 \text{ kN/m}^3$$

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H _x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H _y (Kn)	MOMENTO M _x (m kN)	MOMENTO M _y (m kN)
I	1800	100	200	-200	200
II	1800	500	-----	-----	800
III	1800	100	200	-600	400
IV	1800	550	200	-1500	1500

Hipótesis III:

Peso zapata $P = 4 * 3 * 1,5 * 25 = 450 \text{ kN. (45 t)}$

Traslado al plano de contacto zapata-terreno

Axil: $V_t = 1800 + 450 = 2250 \text{ kN. (225 t.)}$

Cortante en x : $H_x = 100 \text{ kN. (10 t)}$

Cortante en y : $H_y = 200 \text{ kN. (20 t)}$

Momento flector en x: $M_{fx} = -600 - (200 * 1,5) = -900 \text{ m. kN. (- 90 mt.)}$

Momento flector en y: $M_{fy} = 400 + (100 * 1,5) = 550 \text{ m. kN. (55 mt.)}$

Excentricidad en x: $e_x = 550 / 2250 = 0,244 \text{ m} < a/4$

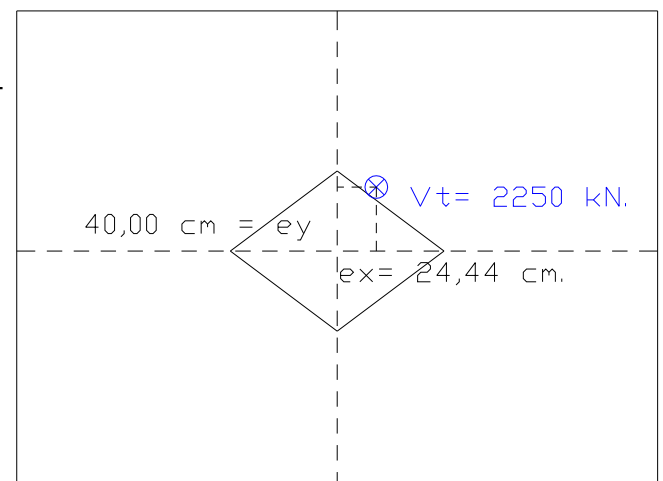
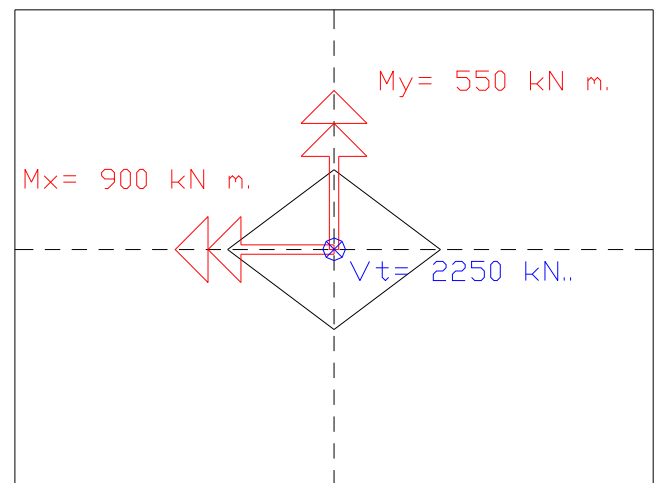
Excentricidad en y: $e_y = 900 / 2250 = 0,40 \text{ m} < b/4$

$6e_x/a + 6e_y/b = 1,464 + 0,800 = 2,264 > 1$

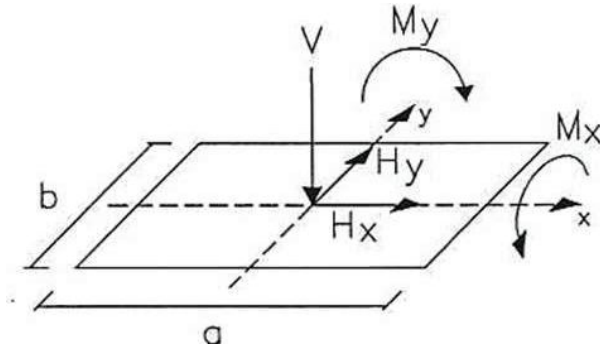
$a/4 = 4/4 = 1,00 \text{ m.}$

$b/4 = 3/4 = 0,75 \text{ m}$

ZONA III



Resultante y punto de paso: HIPÓTESIS IV



$$a = 4\text{ m.}$$

$$b = 3\text{ m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma \text{ hormigón} = 25 \text{ kN/m}^3$$

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H _x (Kñ)	CARGA HORIZONTAL H _y (Kñ)	MOMENTO M _x (m kN)	MOMENTO M _y (m kN)
I	1800	100	200	-200	200
II	1800	500	-----	-----	800
III	1800	100	200	-600	400
IV	1800	550	200	-1500	1500

Hipótesis IV

Peso zapata $P = 4 * 3 * 1,5 * 25 = 450 \text{ kN. (45 t)}$

Traslado al plano de contacto zapata-terreno

Axil: $V_t = 1800 + 450 = 2250 \text{ kN. (225 t.)}$

Cortante en x : $H_x = 550 \text{ kN. (55 t)}$

Cortante en y : $H_y = 200 \text{ kN. (20 t)}$

Momento flector en x: $M_{fx} = -1500 - (200 * 1,5) = -1800 \text{ m. kN. (-180 mt.)}$

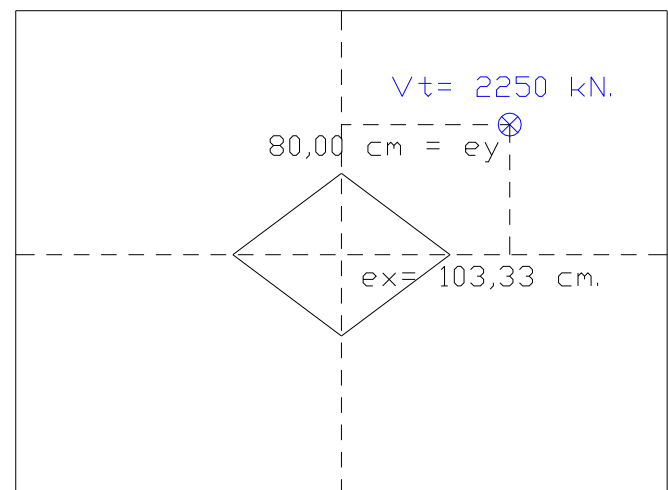
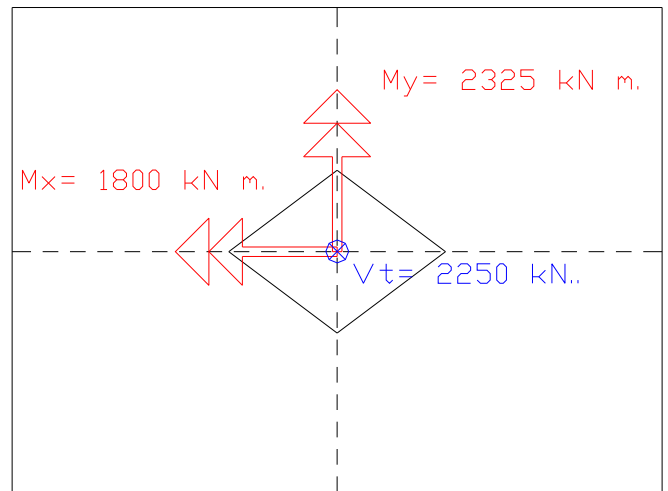
Momento flector en y: $M_{fy} = 1500 + (550 * 1,5) = 2325 \text{ m. kN. (232,5 mt.)}$

Excentricidad en x: $e_x = 2325 / 2250 = 1,033 \text{ m.}$

Excentricidad en y: $e_y = 1800 / 2250 = 0,80 \text{ m}$

$a/4 = 4/4 = 1,00 \text{ m.} < e_x$

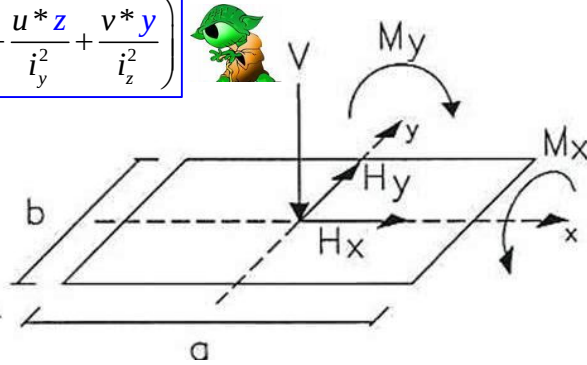
$b/4 = 3/4 = 0,75 \text{ m.} < e_y$



ZONA II

2./ Distribución de tensiones en la base de la zapata: HIPÓTESIS I

$$\sigma_p = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{u \cdot z}{i_y^2} + \frac{v \cdot y}{i_z^2} \right)$$



$$a = 4 \text{ m.}$$

$$b = 3 \text{ m.}$$

$$h = 1,5 \text{ m.}$$

$$\gamma \text{ hormigón} = 25 \text{ kN/m}^3$$

$$\sigma_{adm} = 0,25 \text{ N/mm}^2$$

$$1,25 \sigma_{adm} = 3,13 \text{ daN/cm}^2$$

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H _x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H _y (Kn)	MOMENTO M _x (m kN)	MOMENTO M _y (m kN)
I	1800	100	200	-200	200

$$I_x = 400 \cdot 300^3 / 12 = 9 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$i_x^2 = I_x / (300 \cdot 400) = 7500 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 300 \cdot 400^3 / 12 = 16 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$i_y^2 = I_y / (300 \cdot 400) = 13333,33 \text{ cm}^2$$

Traslado al plano de contacto zapata-terreno

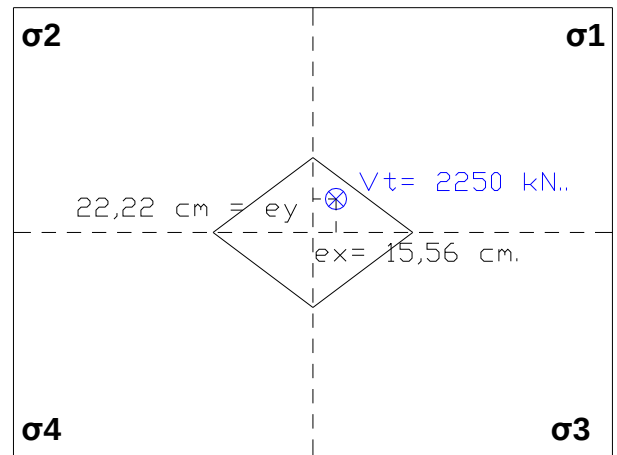
$$V_t = 1800 + 450 = 2250 \text{ kN. (225 t.)}$$

$$M_x = -200 - (200 \cdot 1,5) = -500 \text{ m. kN. (-50 mt.)}$$

$$M_y = 200 + (100 \cdot 1,5) = 350 \text{ m. kN. (35 mt.)}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4$$

ZONA I



$$\sigma_{cdg(0,0)} = \sigma_{cdg} = \frac{2250 \cdot 10^3}{4000 \cdot 3000} = 0,1875 \text{ N/mm}^2 = 1,875 \text{ kp/cm}^2 \quad 1,25 \sigma_{adm} = 3,13 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_4 (-2000, -1500) \quad \sigma_4 = \frac{2250 \cdot 10^3}{4000 \cdot 3000} \left(1 + \frac{-200 \cdot 15,56}{13333,33} + \frac{-150 \cdot 22,22}{7500} \right)$$

$$\sigma_4 = +0,1875 - 0,233 - 0,444 = 0,06 \text{ N/mm}^2 = 0,6 \text{ kp/cm}^2$$

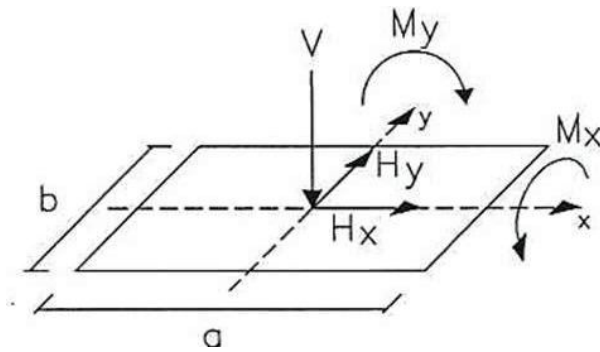
$$\sigma_3 (+2000, -1500) \quad \sigma_3 = +0,1875 + 0,233 - 0,444 = 0,148 \text{ N/mm}^2 = 1,48 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_2 (-2000, +1500) \quad \sigma_2 = +0,1875 - 0,233 + 0,444 = 0,227 \text{ N/mm}^2 = 2,27 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_1 (+2000, +1500) \quad \sigma_1 = +0,1875 + 0,233 + 0,444 = 0,315 \text{ N/mm}^2 = 3,15 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{N}{a \cdot b} \left(1 + \frac{6e_x}{a} + \frac{6e_y}{b} \right) = 0,1875 \left(1 + \frac{6 \cdot 155,56}{4000} + \frac{6 \cdot 222,22}{3000} \right) = 0,315 \text{ N/mm}^2 = 3,15 \text{ kp/cm}^2$$

Distribución de tensiones en la base de la zapata: HIPÓTESIS II



$$a = 4\text{ m.}$$

$$b = 3\text{ m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma \text{ hormigón} = 25 \text{ kN/m}^3$$

$$\sigma_{adm} = 0,25 \text{ N/mm}^2$$

$$1,25 \sigma_{adm} = 3,13 \text{ daN/cm}^2$$

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H _x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H _y (Kn)	MOMENTO M _x (m kN)	MOMENTO M _y (m kN)
II	1800	500	-----	-----	800

$$I_x = 400 \cdot 300^3 / 12 = 9 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$i_x^2 = I_x / (300 \cdot 400) = 7500 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 300 \cdot 400^3 / 12 = 16 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$i_y^2 = I_y / (300 \cdot 400) = 13333,33 \text{ cm}^2$$

Traslado al plano de contacto zapata-terreno

$$V_t = 1800 + 450 = 2250 \text{ kN. (225 t.)}$$

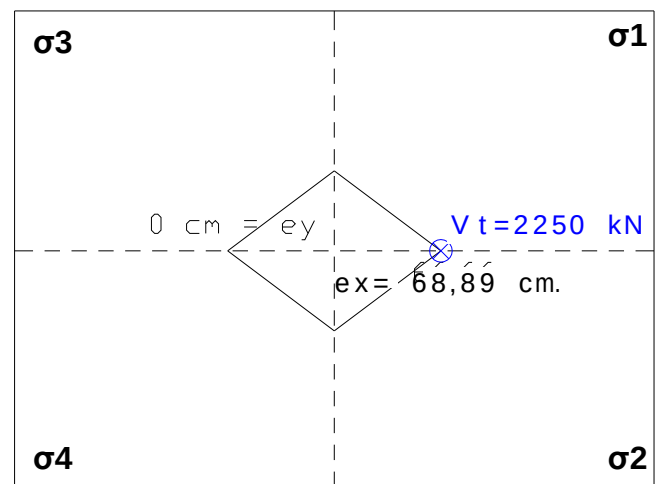
$$M_x = 0 - (0 \cdot 1,5) = 0 \text{ m. kN. (0 mt.)}$$

$$M_y = 800 + (500 \cdot 1,5) = 1550 \text{ m. kN. (155 mt.)}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4$$

$$\text{Excentricidad en x: } e_x = 1550 / 2250 = 0,6889 \text{ m.}$$

$$\text{Excentricidad en y: } e_y = 0 / 2250 = 0 \text{ m}$$



Vértice del Núcleo Central ZONA III

Núcleo central

$$4/6 = 0,666 \text{ m. Prácticamente en el } 3/6 = 0,5 \text{ m}$$

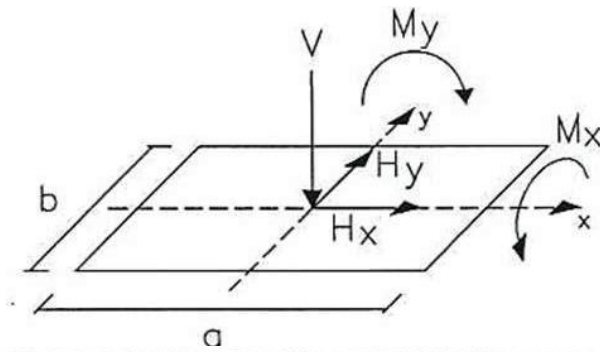
$$200 - 68,89 = 131,11 \rightarrow \text{Base diagrama tensiones: } 3 \cdot 131,11 = 393,33 \text{ cm.}$$

$$\sigma_3 = \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{max}$$

$$\sigma_{max} \cdot \frac{3 \cdot (131,11)}{2} \cdot 3000 = 2250 \cdot 10^3 \text{ N} \quad \sigma_{max} = 0,381 \text{ N/mm}^2 = 3,81 \text{ kp/cm}^2 > 1,25 \sigma_{adm}$$

2./ Distribución de tensiones en la base de la zapata: HIPÓTESIS III



$$a = 4\text{ m.}$$

$$b = 3\text{ m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma \text{ hormigón} = 25 \text{ kN/m}^3$$

$$\sigma_{\text{adm}} = 0,25 \text{ N/mm}^2$$

$$1,25 \sigma_{\text{adm}} = 0,313 \text{ N/mm}^2$$

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H _x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H _y (Kn)	MOMENTO M _x (m kN)	MOMENTO M _y (m kN)
III	1800	100	200	-600	400

$$I_x = 400 \cdot 300^3 / 12 = 9 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$i_x^2 = I_x / (300 \cdot 400) = 7500 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 300 \cdot 400^3 / 12 = 16 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$i_y^2 = I_y / (300 \cdot 400) = 13333,33 \text{ cm}^2$$

Traslado al plano de contacto zapata-terreno

$$V_t = 1800 + 450 = 2250 \text{ kN. (225 t.)}$$

$$M_x = -600 - (200 \cdot 1,5) = 900 \text{ m. kN. (90 mt.)}$$

$$M_y = 400 + (100 \cdot 1,5) = 550 \text{ m. kN. (55 mt.)}$$

$$\text{Excentricidad en x: } e_x = 550 / 2250 = 0,244 \text{ m.} < a/4$$

$$\text{Excentricidad en y: } e_y = 900 / 2250 = 0,40 \text{ m} < b/4$$

$$6e_x/a + 6e_y/b = 1,464 + 0,800 = 2,264 > 1$$

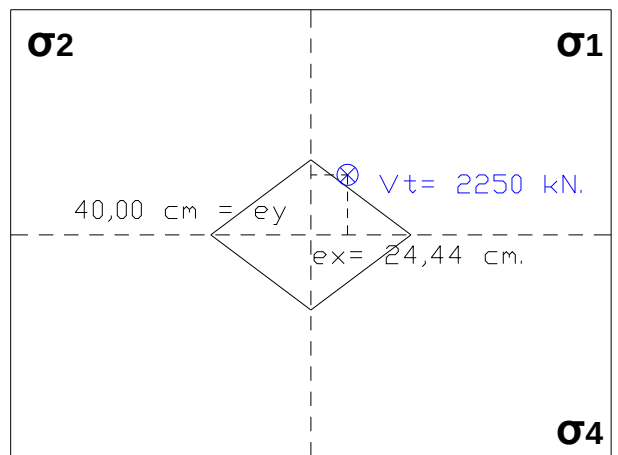
$$a/4 = 4/4 = 1,00 \text{ m.} \quad b/4 = 3/4 = 0,75 \text{ m.}$$

$$c = e_x/a = 24,44/400 = 0,061$$

$$n = 0,85$$

$$d = e_y/b = 40/300 = 0,133$$

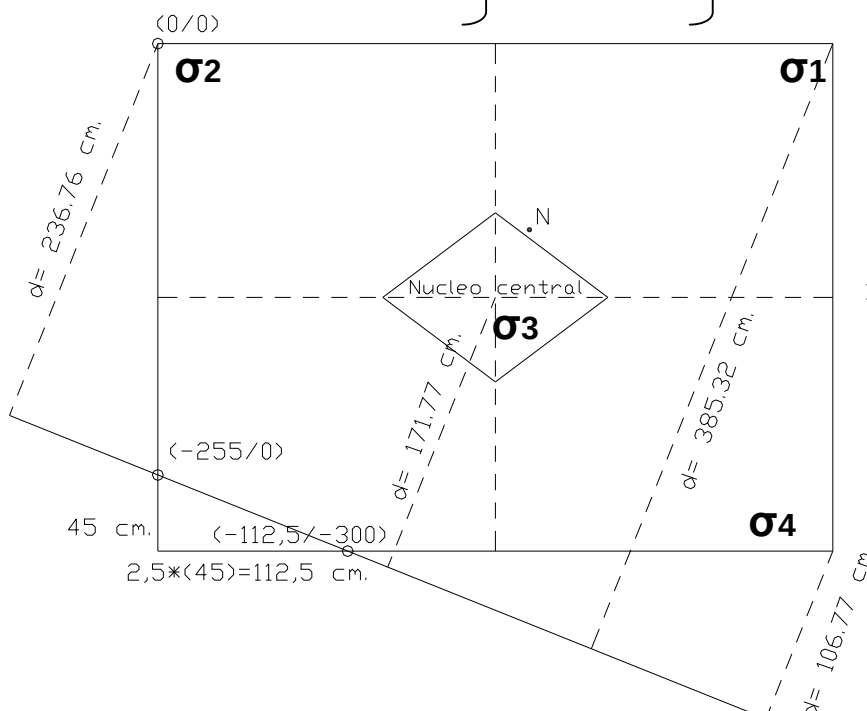
$$m = 2,5$$



$$n \cdot 300 = 255 \text{ cm.}$$

ZONA III

$$[300 - (n \cdot 300)] \cdot 2,5 = 112,5 \text{ cm.}$$



$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{2250 \cdot 10^3}{3000 \cdot 4000} \right) \cdot 2,3 = 0,431 \text{ N/mm}^2$$

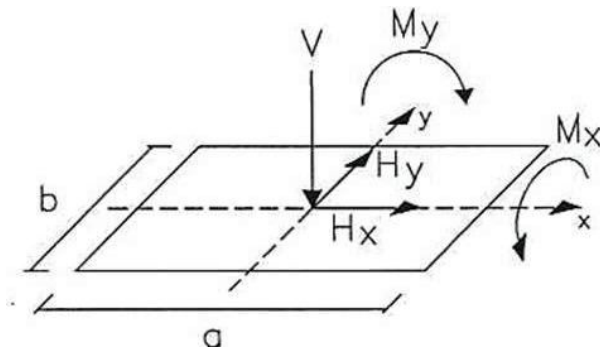
$$\sigma_1 = 0,431 \text{ N/mm}^2 \rightarrow 385,32 \text{ cm}$$

$$\sigma_2 = 0,265 \text{ N/mm}^2 \leftarrow 236,76 \text{ cm}$$

$$\sigma_{3_{cdg}} = 0,192 \text{ N/mm}^2 \leftarrow 171,77 \text{ cm}$$

$$\sigma_4 = 0,119 \text{ N/mm}^2 \leftarrow 106,77 \text{ cm}$$

2./ Distribución de tensiones en la base de la zapata: HIPÓTESIS IV



$$a = 4\text{ m.}$$

$$b = 3\text{ m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma \text{ hormigón} = 25 \text{ kN/m}^3$$

$$\sigma_{adm} = 0,25 \text{ N/mm}^2$$

$$1,25 \sigma_{adm} = 0,313 \text{ N/mm}^2$$

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H _x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H _y (Kn)	MOMENTO M _x (m kN)	MOMENTO M _y (m kN)
IV	1800	550	200	-1500	1500

$$I_x = 400 \cdot 300^3 / 12 = 9 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$i_x = I_x / (300 \cdot 400) = 7500 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 300 \cdot 400^3 / 12 = 16 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$i_y = I_y / (300 \cdot 400) = 13333,33 \text{ cm}^2$$

Traslado al plano de contacto zapata-terreno

$$V_t = 1800 + 450 = 2250 \text{ kN. (225 t.)}$$

$$M_x = -1500 - (200 \cdot 1,5) = -1800 \text{ m. kN. (-180 mt.)}$$

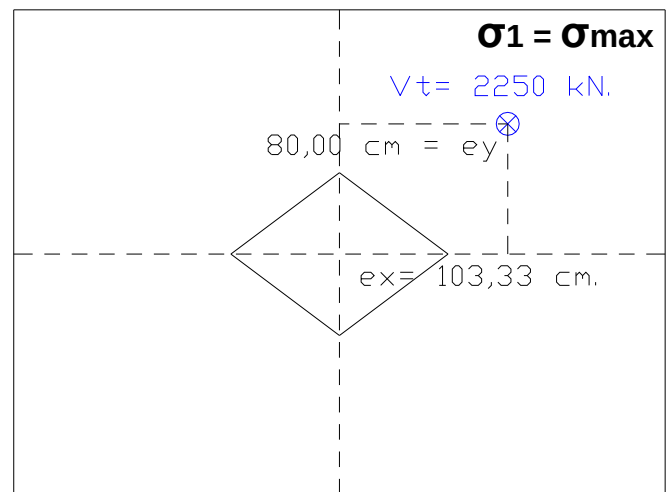
$$M_y = 1500 + (550 \cdot 1,5) = 2325 \text{ m. kN. (232,5 mt.)}$$

$$\text{Excentricidad en x: } e_x = 2325 / 2250 = 1,033 \text{ m.}$$

$$\text{Excentricidad en y: } e_y = 1800 / 2250 = 0,80 \text{ m}$$

$$a/4 = 4/4 = 1,00 \text{ m.}$$

$$b/4 = 3/4 = 0,75 \text{ m}$$

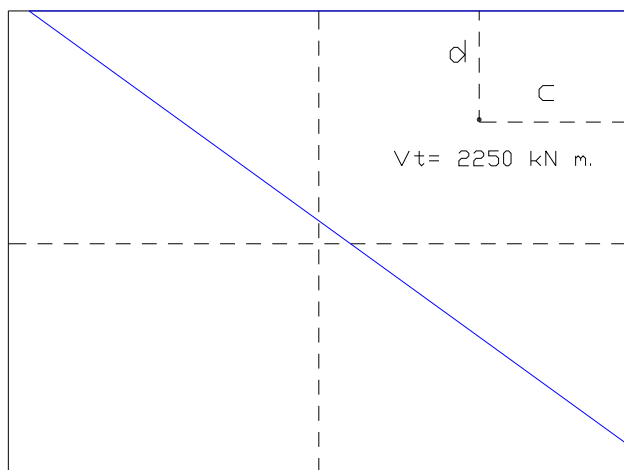


ZONA II

$$c = 2000 - 1033,33 = 966,66 \text{ mm} \times 4 = 3866,66 \text{ mm.}$$

$$d = 1500 - 800 = 700 \text{ mm} \times 4 = 2800 \text{ mm.}$$

$$4c = 3866,66 \text{ mm.}$$



$$4d = 2800 \text{ mm.}$$

$$R = V_t = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} * 4c * 4d \right) \sigma_{max}$$

$$R = V_t = 2250 * 10^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} * 4 * 966,66 * 4 * 700 \right) \sigma_{max}$$

$$\sigma_{max} = 1,2747 \text{ N/mm}^2 = 12,469 \text{ kp/cm}^2 > 1,25 \sigma_{adm}$$

3º/ Esfuerzos horizontales y rozamiento

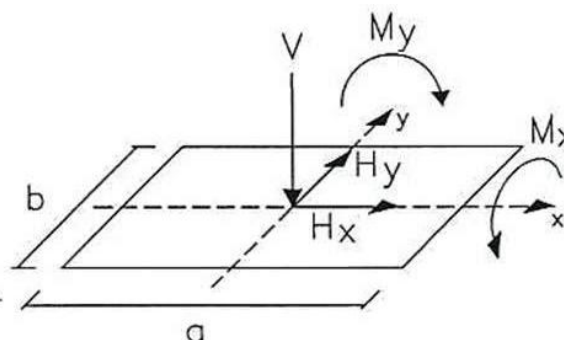
Sobre una zapata de hormigón armado con medidas según figura adjunta, se tienen las siguientes 4 hipótesis de carga mas desfavorables (sin mayorar) referidas a la cara superior de la zapata

$$a = 4\text{m.}$$

$$b = 3\text{m.}$$

$$h = 1,5\text{ m.}$$

$$\gamma_{\text{hormigón}} = 25\text{ kN/m}^3$$



Cuadro resumen de hipótesis:

HIPOTESIS	CARGA VERTICAL V (kN)	CARGA HORIZONTAL H _x (Kn)	CARGA HORIZONTAL H _y (Kn)	MOMENTO M _x (m kN)	MOMENTO M _y (m kN)
I	1800	100	200	-200	200
II	1800	500	-----	-----	800
III	1800	100	200	-600	400
IV	1800	550	200	-1500	1500

Para cada una de las hipótesis se pide:

- 1.- Determinar el valor de la resultante y su punto de aplicación referida al plano de apoyo de la zapata.
- 2.- Distribución de tensiones en la base de la zapata. Comprobar si las tensiones resultantes son validas para una $\sigma_{adm} = 250\text{ kN/m}^2$.
- 3.- Si el terreno de apoyo es granular, $c' = 0,0\text{ kN/m}^2$ y $\phi' = 30^\circ$. Comprobar si los esfuerzos horizontales pueden ser contrarrestados por rozamiento.

HIPÓTESIS I:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \sqrt{100^2 + 200^2} = 223,617\text{kN}$$

$$(N + P) \tan \phi_d \geq 1,5H \quad 2250 * \tan \frac{3}{4} 30^\circ = 931,981\text{kN} > 1,5V = 1,5 * 233,617 = 335,425\text{kN}$$

HIPÓTESIS II:

$$2250 * \tan \frac{3}{4} 30^\circ = 931,981\text{kN} > 1,5V = 1,5 * 500 = 750\text{kN}$$

HIPÓTESIS III: Igual hipótesis I

HIPÓTESIS IV:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \sqrt{550^2 + 200^2} = 585,235\text{kN}$$

$$2250 * \tan \frac{3}{4} 30^\circ = 931,981\text{kN} > 1,5V = 1,5 * 500 = 877,853\text{kN}$$