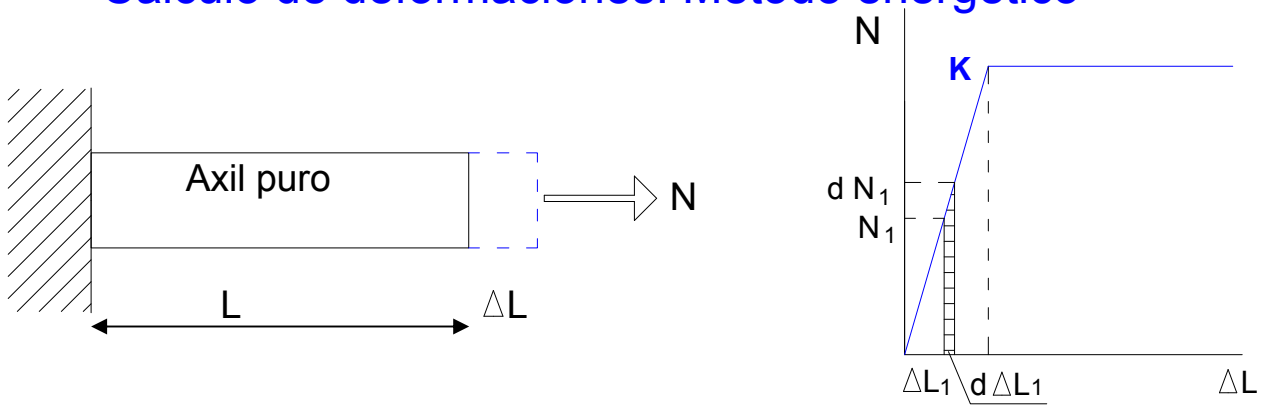


Cálculo de deformaciones. Método energético



Trabajo externo (W): En el gráfico de la derecha, es el realizado por la carga "N1" conforme varía su valor desde cero hasta el máximo "N" y según la variación de longitud de la barra varía desde cero hasta su valor máximo \$\Delta L_1\$.

Es por tanto la suma de todas las franjas verticales, diferenciales, rayadas y por ello siempre es el área bajo la curva carga – deformación.

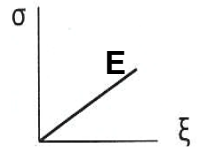
Las ligaduras tanto externas como internas, si las hay, son ideales (sin pérdidas por rozamiento u otras causas). Además, la entrada en carga se produce lentamente. Todo el trabajo externo se almacena en la barra en forma de energía elástica de deformación.

Ley de Hooke en axil: $N = K * \Delta L$ y para una carga axil dada $N_1 = K * \Delta L_1$

Al realizar el balance energético \rightarrow Trabajo externo (W) = Trabajo interno (τ)

Trabajo interno (τ): El de las tensiones " σ " en las deformaciones unitarias " ϵ ":

$$\sigma = E * \epsilon$$



Realizando el balance energético: $W = \tau$

$$W = \tau = \int_0^{\Delta L} dW = \int_0^{\Delta L} \left(N_1 + \frac{dN_1}{2} \right) d\Delta L_1 = \int_0^{\Delta L} N_1 * d\Delta L_1 + \int_0^{\Delta L} \frac{dN_1}{2} * d\Delta L_1$$

Introduciendo la ley de Hooke: $N_1 = K * \Delta L_1$

$$W = \tau = \int_0^{\Delta L} K * \Delta L_1 * d\Delta L_1 = K \int_0^{\Delta L} \Delta L_1 * d\Delta L_1 = K \left[\frac{\Delta L_1^2}{2} \right]_0^{\Delta L} = K \frac{\Delta L^2}{2} = \frac{N}{\Delta L} * \frac{\Delta L^2}{2}$$

El potencial interno es:

$$\tau = \frac{N * \Delta L}{2}$$

Teorema de Clapeyron: En el dominio elástico el trabajo de las cargas externas es igual a la energía de deformación

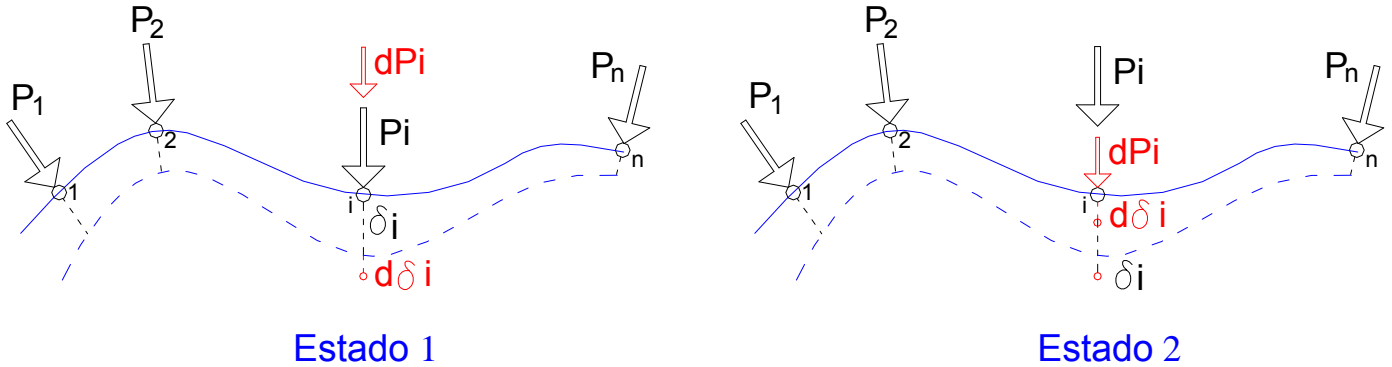
Aplicando otra vez la ley de Hooke:

$$\tau = \frac{N * (N * L / E * A)}{2} = \frac{N^2 * L}{2E * A}$$

Teoremas de Castigliano I

Aplicado a estructuras cargadas en nudos.

Consideramos un estado general de cargas aplicadas en una estructura. Sea $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ el sistema de cargas aplicado en los nudos $1, 2, \dots, i, \dots, n$.



Al aplicar dichas cargas lentamente, la estructura se cargará con una energía de deformación elástica que llamaremos “ τ ”. Llamaremos también “ δ_i ” al desplazamiento del nudo “ i ” en la dirección de la carga “ P_i ”.

Estado de carga ①:

Al aplicar el sistema de cargas tendremos: $\tau = \sum_1^n \left(\frac{1}{2} P_i * \delta_i \right)$

Ahora incrementaremos en un diferencial de carga: “ dP_i ”, la carga “ P_i ” de un ludo cualquiera “ i ”. El potencial interno ahora es:

$$\tau + d\tau = \frac{1}{2} \sum_1^n (P_i * \delta_i) + \frac{\cancel{dP_i * d\delta_i}}{2} + P_i * d\delta_i$$

Estado de carga ②:

Aplicaremos el principio de superposición en régimen elástico con la intención de obtener el mismo resultado.

Primero sobre la estructura descargada aplicaremos “ dP_i ” que no produce trabajo.

Después aplicaremos el sistema de cargas anterior en los mismos nudos.

$$\tau + d\tau = \frac{\cancel{dP_i * d\delta_i}}{2} + dP_i * \delta_i + \frac{1}{2} \sum_1^n (P_i * \delta_i)$$

Que evidentemente no es la expresión obtenida en el **estado de carga ①**

De estas dos ecuaciones se derivan los teoremas de Castigliano que se exponen a continuación:

Teoremas de Castigliano II

Del estado de Carga ① : $d\tau = P_i * d\delta_i \rightarrow \frac{d\tau}{d\delta_i} = P_i$

Del estado de Carga ② : $d\tau = dP_i * \delta_i \rightarrow \frac{d\tau}{dP_i} = \delta_i$

Hasta este momento, sólo una de las cargas variaba su valor de "Pi" a "Pi+dPi". El potencial variaba en función de esta carga y se podía matematizar mediante diferenciales ordinarios.

La realidad es que el potencial interno es función de todas las cargas exteriores y por tanto función de todas ellas. Por tanto hay que utilizar derivadas parciales.

Primer teorema de Castigliano: $\frac{\partial \tau}{\partial \delta_i} = P_i$

La derivada parcial de la función del potencial interno respecto de cualquier desplazamiento nos proporciona la carga que origina este desplazamiento.

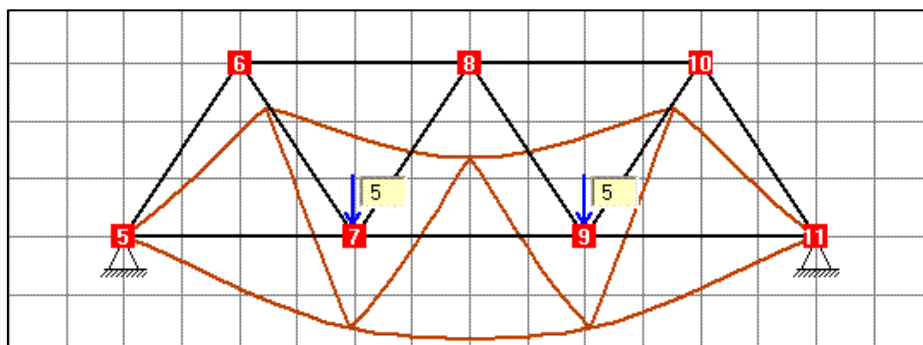
Este primer teorema no se lo atribuyó enteramente Castigliano y no presenta mucha utilidad ya que hay que requiere conocer bien la posición definitiva del nudo a estudiar.

Segundo teorema de Castigliano: $\frac{\partial \tau}{\partial P_i} = \delta_i$

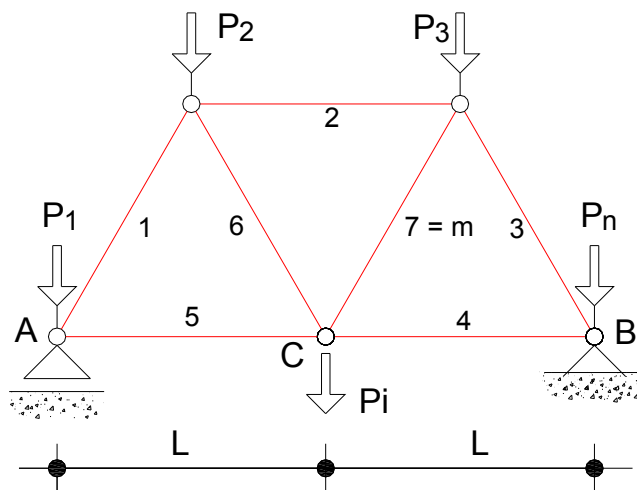
La derivada parcial de la función del potencial interno respecto de cualquier carga aplicada en un nudo nos proporciona el desplazamiento del nudo en la dirección de la carga elegida.

Este segundo teorema se le atribuye íntegramente Castigliano y presenta gran utilidad en estructuras articuladas ya que proporciona un método para conocer el desplazamiento de un nudo cualquiera.

Usualmente en una cercha importante nos interesa conocer la flecha de la misma.



Aplicación de Castigliano en estructuras articuladas planas



Para una barra cualquiera "j" el potencial es: $\tau_j = \frac{1}{2} * \frac{N_j^2 * L_j}{E * A_j}$

Por superposición, para toda la estructura el potencial será: $\tau = \frac{1}{2} \sum_1^m \frac{N_j^2 * L_j}{E * A_j}$

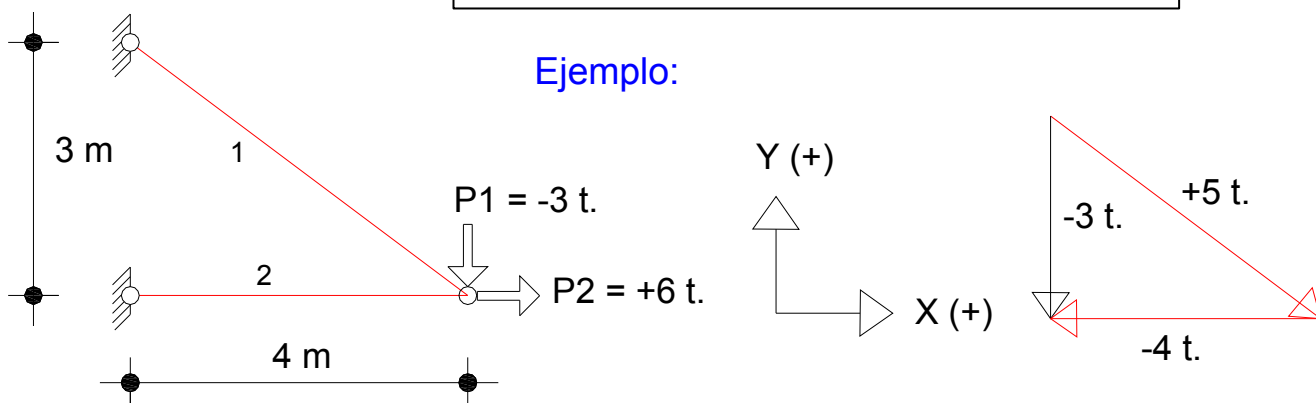
El desplazamiento "δi" en la dirección "Pi", es: $\frac{\partial \tau}{\partial P_i} = \delta_i = \sum_1^m \frac{N_j * L_j}{E * A_j} * \left(\frac{\partial N_j}{\partial P_i} \right)$

La dificultad es ahora calcular para cada barra: $\frac{\partial N_j}{\partial P_i}$

Recordemos que el axil de una barra cualquiera "j" de una estructura articulada puede expresarse como una combinación lineal de todas las cargas exteriores "Pi" y será de la forma:

$$N_j = C_{j1} * P_1 + \dots + C_{ji} * P_i + \dots + C_{jn} * P_n$$

Ejemplo:



$$N_1 = C_{11} * P_1 + C_{12} * P_2$$

$$N_2 = C_{21} * P_1 + C_{22} * P_2$$

$$N_1 = -1/0,6 * (-3) + 0,0 * (+6)$$

$$N_2 = 1/0,75 * (-3) + 1,0 * (+6)$$

Axil de una barra en función de las cargas exteriores.

Calculando la derivada parcial de N respecto de Pi:

$$\frac{\partial N_j}{\partial P_i} = \frac{\partial (C_{j1} * P_1 + \dots + C_{ji} * P_i + \dots + C_{jn} * P_n)}{\partial P_i} = C_{ji}$$

(Entonces esta derivada parcial no sólo pudiese realizarse mediante funciones matemáticas).

Los coeficientes $C_{j1} \dots C_{ji} \dots C_{jn}$ son constantes y tan sólo dependen de la geometría de la estructura.

El método a seguir es hacer nulas todas las cargas exteriores excepto " $P_i = 1$ ".

Tendremos entonces que: $\frac{\partial N_j}{\partial P_i} = C_{ji}$

Esto representa, en si mismo, un estado auxiliar de carga, ficticio, pero muy útil ya que permite encontrar fácilmente los coeficientes: $C_{ji} = N_{ji}$

Entonces: $\delta i = \sum_1^m N_j * C_{ji} \frac{L_j}{E * A_j}$

Siendo los coeficientes "Cji" el axil correspondiente "Nj" de la estructura auxiliar. Llamando ESTADO "O" al estado Real de cargas y ESTADO "I" al estado auxiliar con carga única "Pi =1".

Se obtiene la formulación particular para estructuras articuladas del denominado:

TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

$$\vec{1} * \delta i = \sum_1^m N_j^O * N_j^I * \frac{L_j}{E * A_j}$$

Que suele enunciarse como sigue:

El trabajo de las cargas virtuales (1) en los desplazamientos reales (δi) debe ser igual que el trabajo de las solicitaciones reales (N_j^O) en los desplazamientos virtuales ($N_j^I * L_j$) / ($E * A_j$)

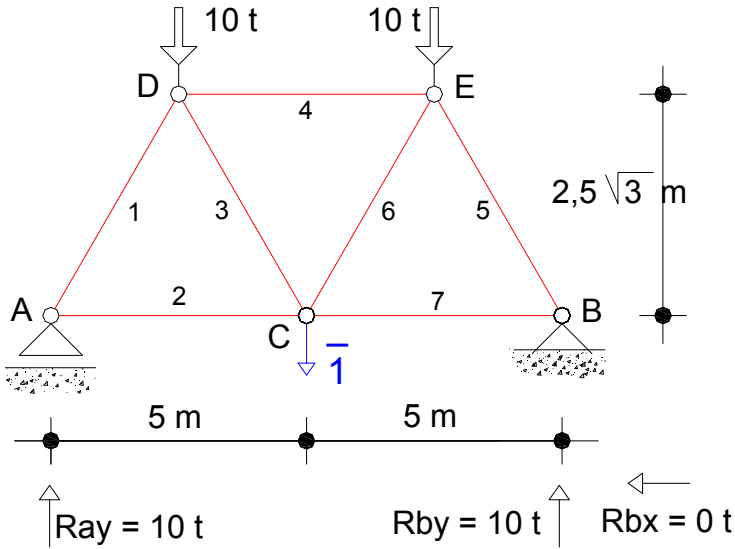
Ejemplo nº 1 Cálculo desplazamiento nudo

De la estructura de peso propio despreciable y para la hipótesis de carga dada.

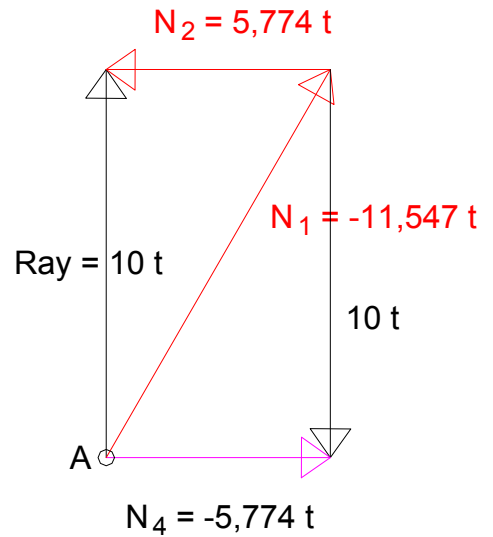
Se pide:

1º Calcular el desplazamiento vertical "f" del nudo "C" y comprobar si: $f = L / 1000$

Datos: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ $A_j = 5 \text{ cm}^2$



ESTADO "0"



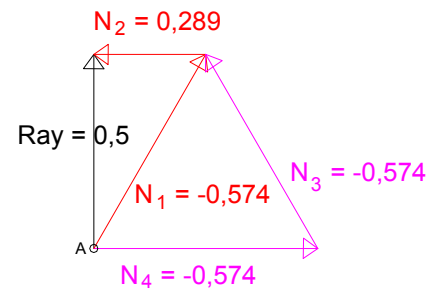
ESTADO "0"

- $N_1 = -11,5470 \text{ t}$
- $N_2 = + 5,7735 \text{ t}$
- $N_3 = 0,00 \text{ t}$
- $N_4 = - 5,7735 \text{ t}$
- $N_5 = -11,5470 \text{ t}$
- $N_6 = 0,00 \text{ t}$
- $N_7 = + 5,7735 \text{ t}$

ESTADO I

- $N_1 = - 0,5774$
- $N_2 = + 0,2887$
- $N_3 = + 0,5774$
- $N_4 = - 0,5774$
- $N_5 = - 0,5774$
- $N_6 = + 0,5774$
- $N_7 = + 0,2887$

ESTADO I



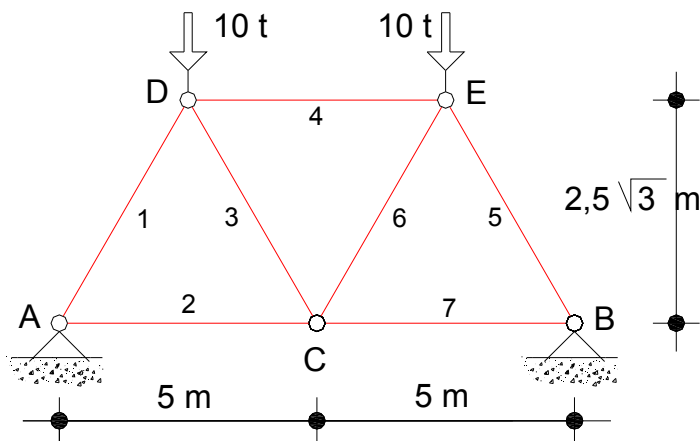
Teorema de los trabajos virtuales:
$$\delta i = \sum_1^m N_j^O * N_j^I * \frac{L_j}{E * A_j}$$

$$\delta c_v = \frac{5 * 10^5}{2 * 10^6 * 5} * \left[\begin{aligned} & (-11,5470 * -0,5774) + (5,7735 * 0,2887) + (0,00 * 0,5774) \\ & + (-5,7735 * -0,5774) + (-11,5470 * -0,5774) + (0,00 * -0,5774) \\ & + (5,7735 * 0,2887) \end{aligned} \right]$$

$$\delta c_v = \frac{5 * 10^5}{2 * 10^6 * 5} * [20] = 1,00 \text{ cm}$$

Ejemplo nº 2. Estructura Hiperestática Externa (GH = 1)

1º Obtener las reacciones en los apoyos y las solicitaciones de las barras.



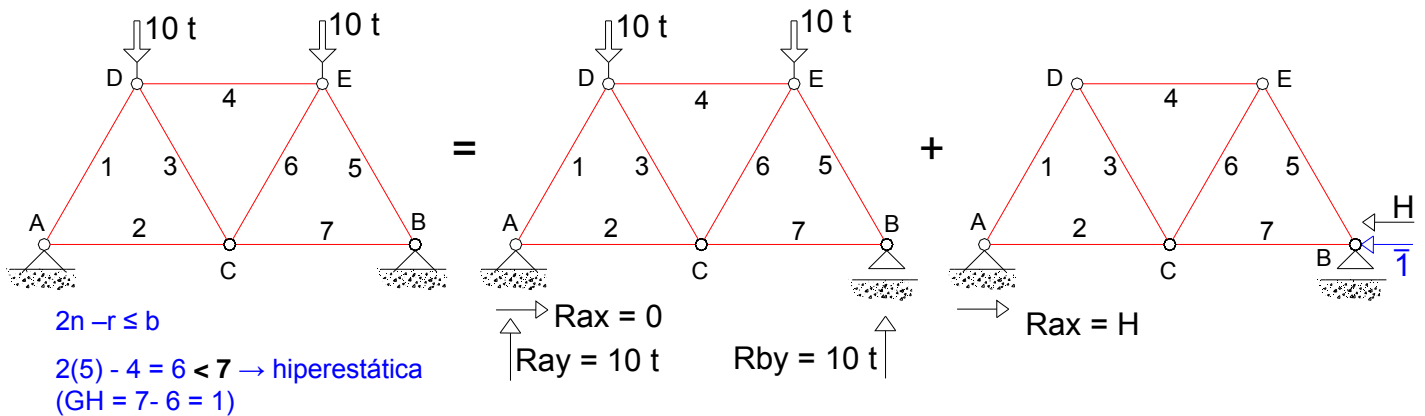
Datos: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$
 $A_j = 5 \text{ cm}^2$

Por superposición el estado final:

$$N_j = N_j^O + N_j^I * H$$

ESTADO "O"

ESTADO I



$$2n - r \leq b$$

$$2(5) - 4 = 6 < 7 \rightarrow \text{hiperestática}$$

$$(GH = 7 - 6 = 1)$$

Teorema de los trabajos virtuales: $\delta_{BH} = 0 = \sum_1^7 \left[(N_j^O + N_j^I * H) * N_j^I * \frac{L_j}{E * A_j} \right]$

ESTADO "O"

ESTADO I

ESTADO FINAL

$$N_1 = -11,5470 \text{ t}$$

$$N_1 = 0,00$$

$$N_1 = -11,5470 \text{ t}$$

$$N_2 = + 5,7735 \text{ t}$$

$$N_2 = - 1,00$$

$$N_2 = 0,00 \text{ t}$$

$$N_3 = 0,00 \text{ t}$$

$$N_3 = 0,00$$

$$N_3 = 0,00 \text{ t}$$

$$N_4 = - 5,7735 \text{ t}$$

$$N_4 = 0,00$$

$$N_4 = - 5,7735 \text{ t}$$

$$N_5 = -11,5470 \text{ t}$$

$$N_5 = 0,00$$

$$N_5 = -11,5470 \text{ t}$$

$$N_6 = 0,00 \text{ t}$$

$$N_6 = 0,00$$

$$N_6 = 0,00 \text{ t}$$

$$N_7 = + 5,7735 \text{ t}$$

$$N_7 = - 1,00$$

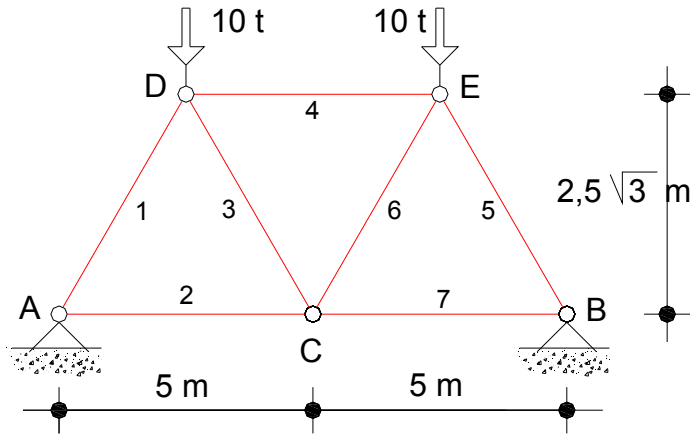
$$N_7 = 0,00 \text{ t}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial R_{BH}} = \frac{\partial \tau}{\partial H} = \frac{5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6 * 5} \left[(5,7735 * -1) + (1^2 * H) \right] * 2 = -11,547 + 2H = 0$$

$$H = 5,7735 \text{ t.}$$

Ejemplo nº 2: Estructura Hiperestática (GH = 1)

1º Obtener las reacciones en los apoyos y las solicitaciones de las barras.



Datos: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$
 $A_j = 5 \text{ cm}^2$

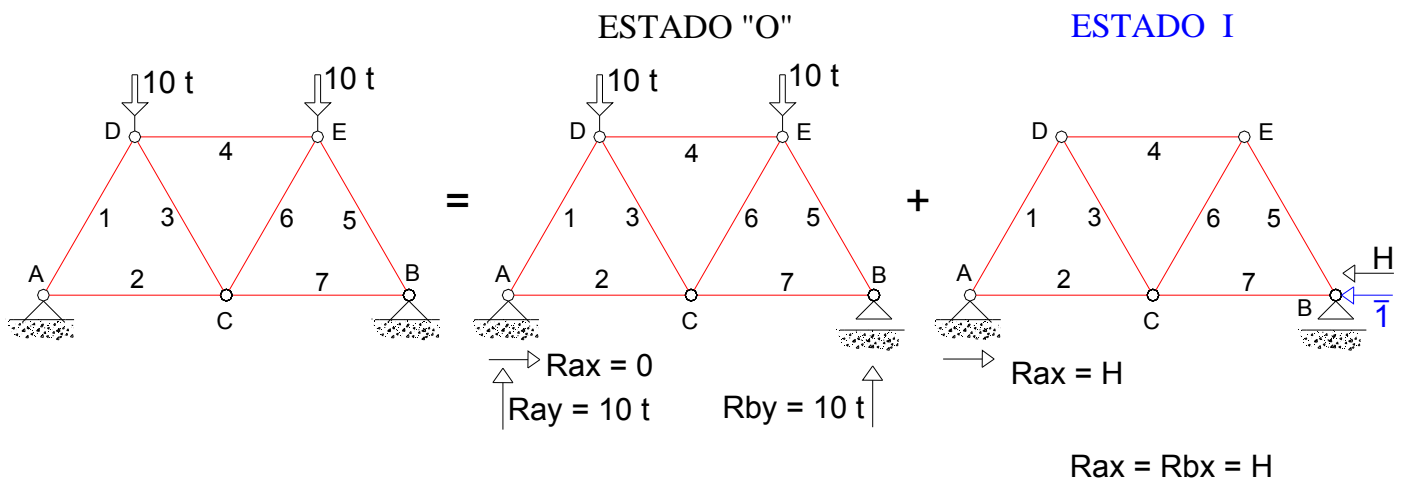


Tabla práctica:

B	L_m	A_{cm^2}	L/A	$N_j^0_t$	N_j^I	$\frac{L}{A} * N_j^0 * N_j^I$	$\frac{L}{A} * N_j^I * N_j^I * H$	$N_j^0 * N_j^I * H_t$
1	5	5	1	-11,5470	0,00	0,00	0,00	-11,5470
2	5	5	1	+ 5,7735	- 1,00	- 5,7735	1 * H	0,00
3	5	5	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	5	5	1	- 5,7735	0,00	0,00	0,00	- 5,7735
5	5	5	1	-11,5470	0,00	0,00	0,00	-11,5470
6	5	5	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	5	5	1	+ 5,7735	- 1,00	- 5,7735	1 * H	0,00
						-11,5470	= 2 * H	

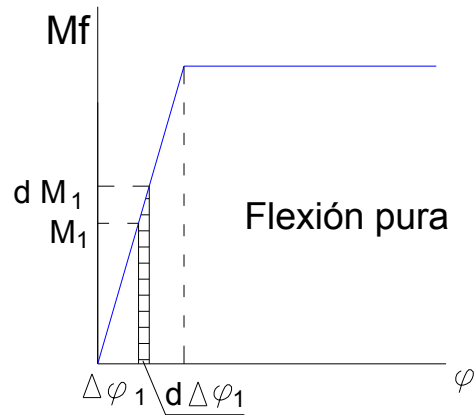
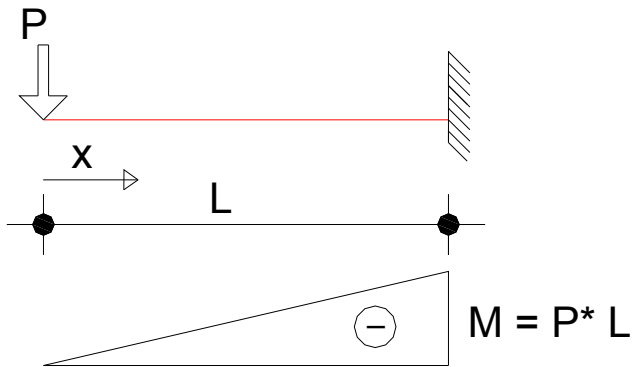
$H = 5,7735 \text{ t.}$

Ejemplo nº 3 Teorema de Menabrea

El ejemplo nº 2 resulta una aplicación práctica del teorema de Menabrea.

En las estructuras hiperestáticas, las reacciones redundantes (hiperestática externa) o, en su caso, las barras redundantes (hiperestática interna) toman aquellos valores que hacen mínimo el potencial interno (energía de deformación).

Ejemplo nº 3



En axil puro con N constante:

$$\tau = \frac{1}{2} * \frac{N^2 * L}{E * A}$$

En flexión pura con Mf constante:

$$\tau = \frac{1}{2} * \frac{Mf^2 * L}{E * I}$$

En flexión simple, con Mf variable (despreciando la deformación por cortante):

$$W = \tau = \int_0^L \frac{Mf^2 * dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(P * x)^2}{2EI} * dx = \int_0^L \frac{P^2 * x^2}{2EI} * dx = \left[\frac{P^2 * x^3}{6EI} \right]_0^L = \frac{P^2 * L^3}{6EI}$$

El potencial es una función continua y derivable:

Si se quisiera conocer la deformación flectora en el extremo del voladizo se proceda a realizar su primera derivada respecto a la carga "P":

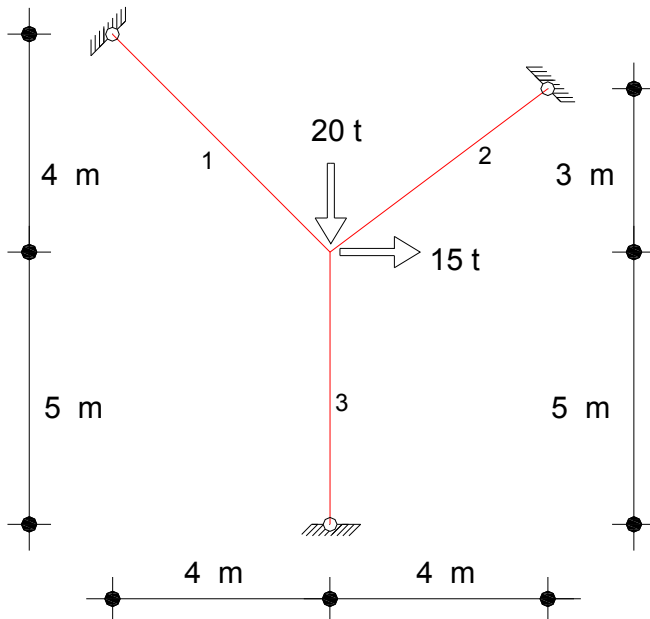
$$\frac{\partial \tau}{\partial P} = 2 \frac{P * L^3}{6EI} = \frac{P * L^3}{3EI}$$

Si se deriva nuevamente respecto a "P": $\frac{\partial^2 \tau}{\partial P^2} = \frac{3L^3}{EI}$

La segunda derivada del potencial siempre es positiva (condición de mínimo para una función matemática usual como es el potencial interno).

Ejemplo nº 4. Estructura Hiperestática Interna (GH = 1)

Obtener las sollicitaciones de las barras.



Datos:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$A = 20 \text{ cm}^2$$

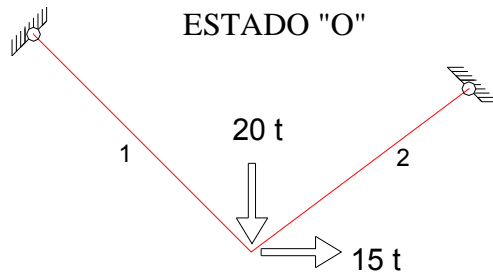
$$2n - r \leq b$$

$2(4) - 6 = 2 < 3 \rightarrow$ hiperestática interna
(GH = 3 - 2 = 1)

Simple de reticulado incompleto.

Base fija

ESTADO "O"

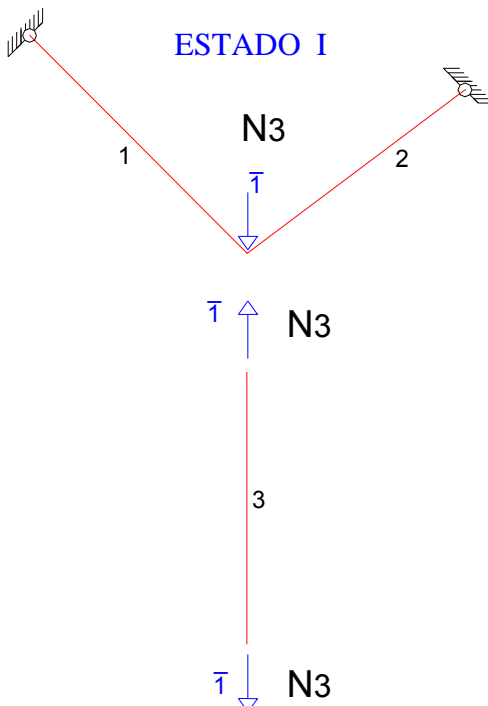


$$N_1 = + 25,2538 \text{ t.}$$

$$N_2 = + 3,5714 \text{ t.}$$

$$N_3 = 0,00 \text{ t.}$$

ESTADO I



$$N_1 = + 0,8081$$

$$N_2 = + 0,7143$$

$$N_3 = + 1,00$$

La variación de longitud barra nº 3

$$\Delta L_3 = \frac{N_3 \cdot L_3}{E \cdot A_3} = \left(\frac{N_3 \cdot 5}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} \right) 10^5$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial N_3} = \left(\frac{4\sqrt{2} \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} \right) * [25,2538 + 0,8081N_3] + \left(\frac{5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} \right) [3,5714 + 0,7143N_3]$$

$$\Delta L_3 + \frac{\partial \tau}{\partial N_3} = 0 \rightarrow N_3 = -11,40 \text{ t}$$

Ejemplo nº 4. Estructura Hiperestática Interna (GH = 1)

Obtener las solicitaciones de las barras.

Datos:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

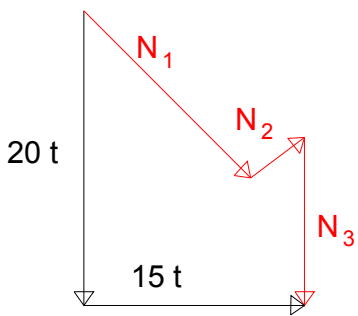
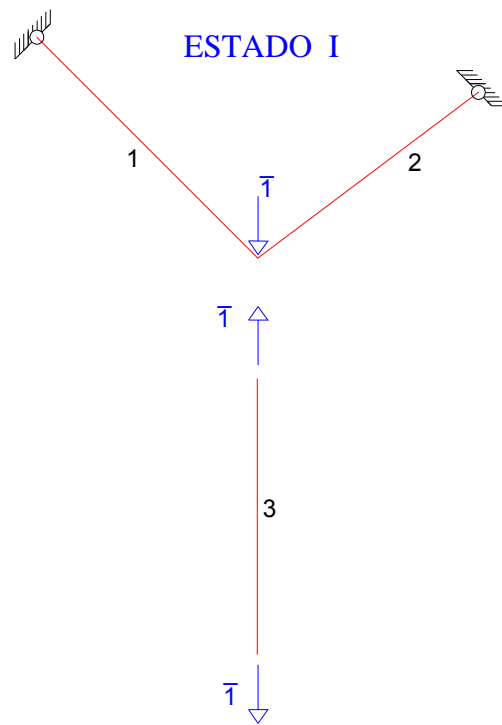
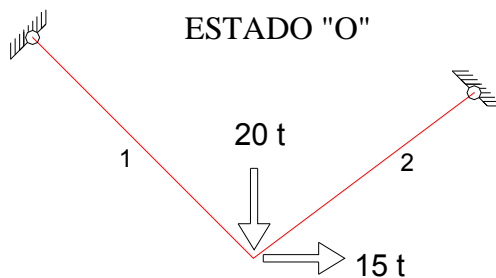
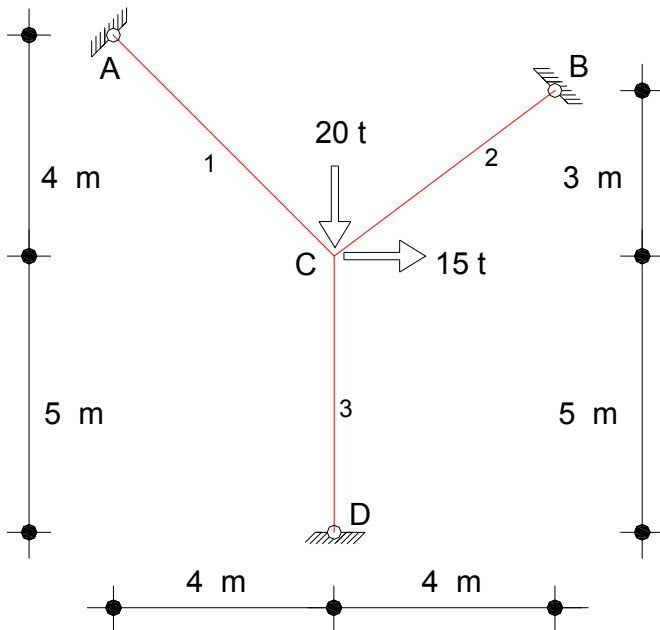
$$A = 20 \text{ cm}^2$$

$$2n - r \leq b$$

$$2(4) - 6 = 2 < 3 \rightarrow \text{hiperestática interna (GH = 3 - 2 = 1)}$$

Simple de reticulado incompleto.

Base fija



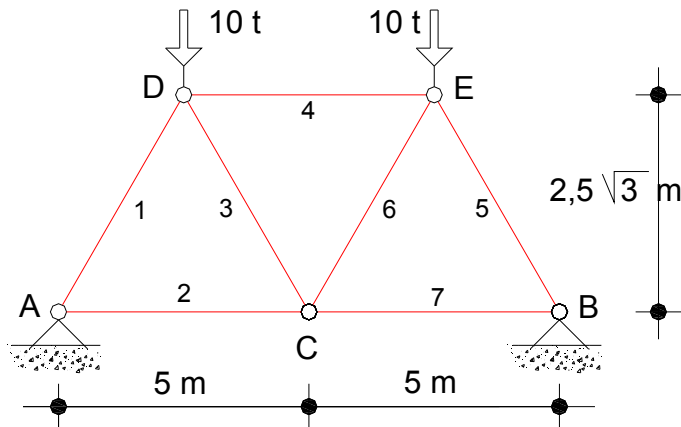
Equilibrio fuerzas nudo C

Tabla práctica:

B	L _{cm}	A _{cm²}	L/A	N _{j^o} t	N _{jⁱ}	$\frac{L}{A} * N_j^o * N_j^i$	$\frac{L}{A} * N_j^i * N_j^i * N_3$	N _{TOTAL} N _{j^o} * N _{jⁱ} * N ₃ t
1	400*√2	20	28,2843	25,2538	0,8081	577,2146	18,4704 N ₃	+ 16,04
2	500	20	25	3,5714	0,5714	63,7763	12,7556 N ₃	- 4,5716
3	500	20	25	0,00	1,00	0,00	25,00 N ₃	- 11,40
640,9908 = 56,2260 N ₃								

Ejemplo nº 5: Estructura Hiperestática (GH = 1)

1º Obtener las reacciones en los apoyos y las solicitaciones de las barras.



Datos: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$

$A_j = 5 \text{ cm}^2$

ESTADO "O"

ESTADO I

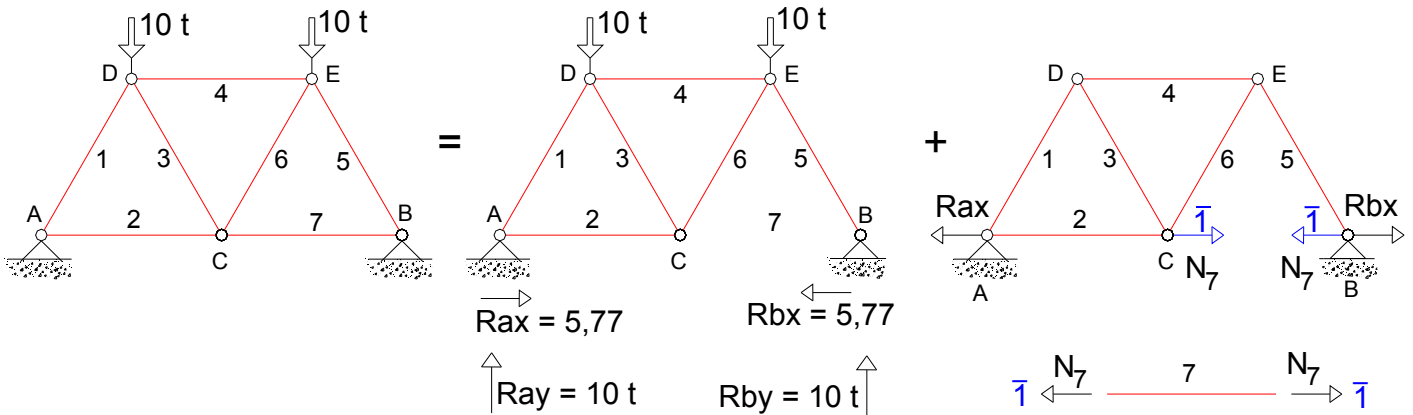


Tabla práctica:

								N_{TOTAL}
B	L_m	A_{cm^2}	L/A	$N_j^0_t$	N_j^I	$\frac{L}{A} * N_j^0 * N_j^I$	$\frac{L}{A} * N_j^I * N_j^I * N_7$	$N_j^0 * N_j^I * N_7t$
1	5	5	1	-11,5470	0,00	0,00	0,00	-11,5470
2	5	5	1	0,00	+1,00	0,00	0,00	0,00
3	5	5	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	5	5	1	- 5,7735	0,00	0,00	0,00	- 5,7735
5	5	5	1	-11,5470	0,00	0,00	0,00	-11,5470
6	5	5	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	5	5	1	0,00	+1,00	0,00	$1 * N_7$	0,00
						0,00	$= 1 * N_7$	

$N_7 = 0,0 \text{ t.}$