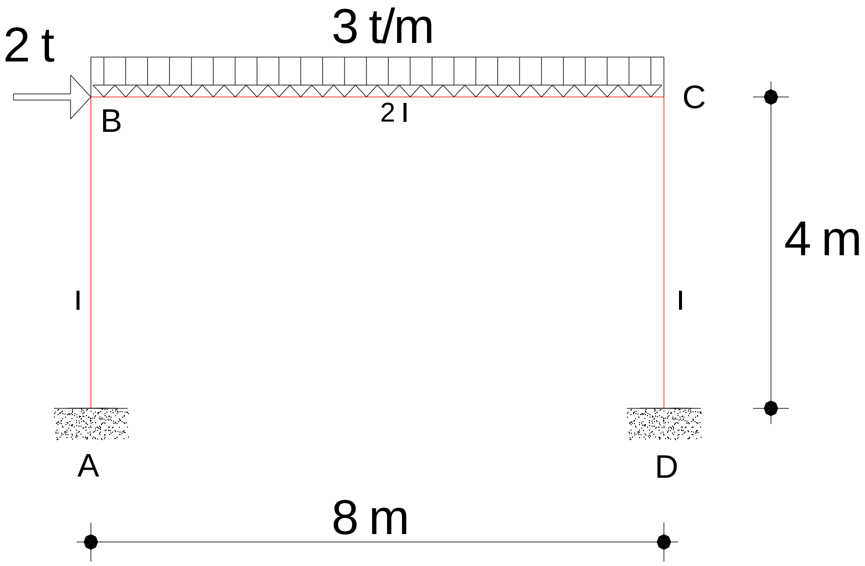
Ejercicio nº 4 + 5 : El pórtico simple desplazable



3 ecuaciones generales de equilibrio y 6 incógnitas → **Grado Hiperestático = 3**
(método de las fuerzas)

El problema se puede afrontar en primera aproximación, utilizando una de las dos ayudas que se tienen en todos los casos:

A/ Método de las secciones.

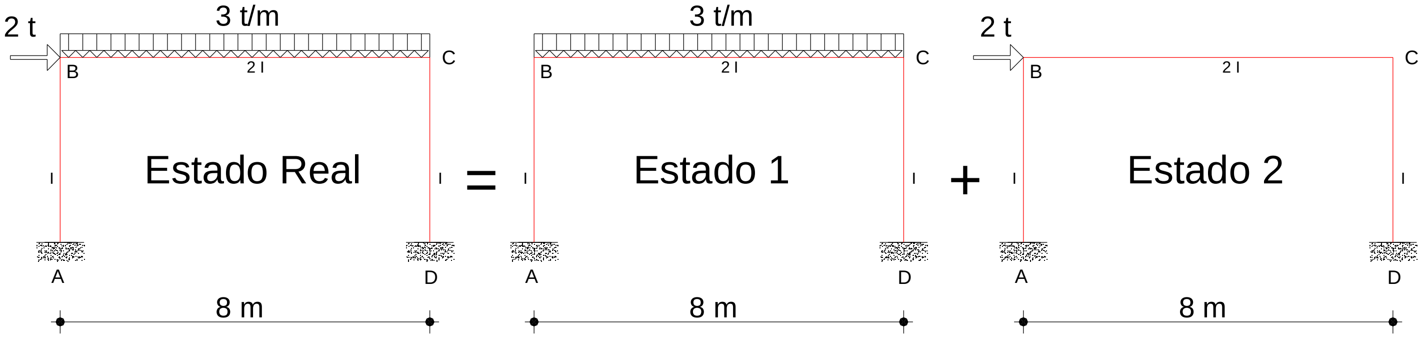
B/ Método de superposición.

En este caso aplicaremos el **método de superposición**, descomponiendo el estado real en la suma de dos estados parciales que pueden tener realidad física o no (en este caso sí):

1/ acción gravitatoria que resulta ser un estado simétrico de forma y carga.

+

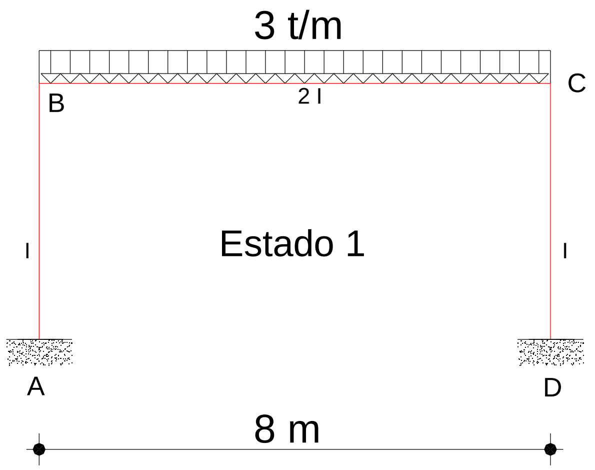
2/ Acción de viento que resulta ser un estado simétrico de forma y antimétrico de carga.



Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ejercicio nº 4: El pórtico simple (estado I)

De la estructura croquizada de peso propio despreciable se pide: diagramas de solicitaciones a escala y acotados.



ETAPA I : M.E.P. y factores de reparto.

Barra nº	L m.	A bxh	I	K EI	M.E.P. mt Izda	M.E.P. mt Dcha
1	8	30x30	I	1EI		
2	6	60x30	2I	1EI	-16,00	+16,00
3	4	30x30	I	1EI		

Nudo B:

$K_1 = EI \rightarrow$ **r1 = .5**

$K_2 = EI \rightarrow$ **r2 = .5**

$\Sigma K_j = 2EI$ **Σ rj = 1**

Nudo C:

$K_2 = EI \rightarrow$ **r2 = .5**

$K_3 = EI \rightarrow$ **r3 = .5**

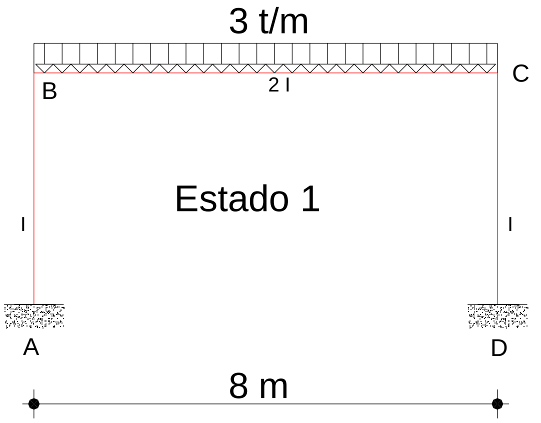
$\Sigma K_j = 2EI$ **Σ rj = 1**

ETAPA II : Equilibrio de nudos. Se liberan los nudos uno a uno, se equilibra y transmite en su caso.

Se comienza por el nudo más desequilibrado.

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ejemplo nº 4: estructura de dos nudos.(método matricial).



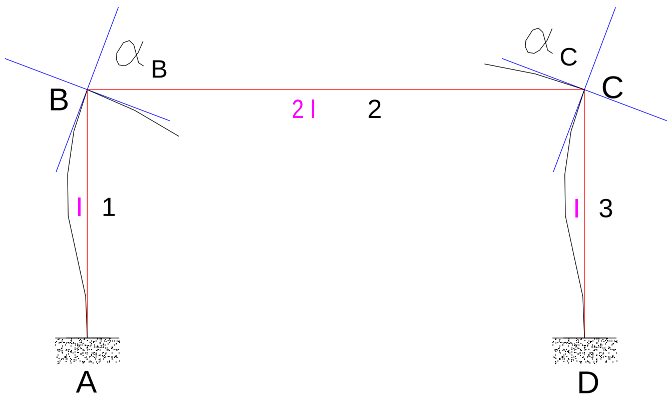
Barra nº	L m.	A bxh	I	K EI	M.E.P. mt Izda	Dcha
1	8	30x30	I	1EI		
2	6	60x30	2I	1EI	-16,00	+16,00
3	4	30x30	I	1EI		

Método Matricial.

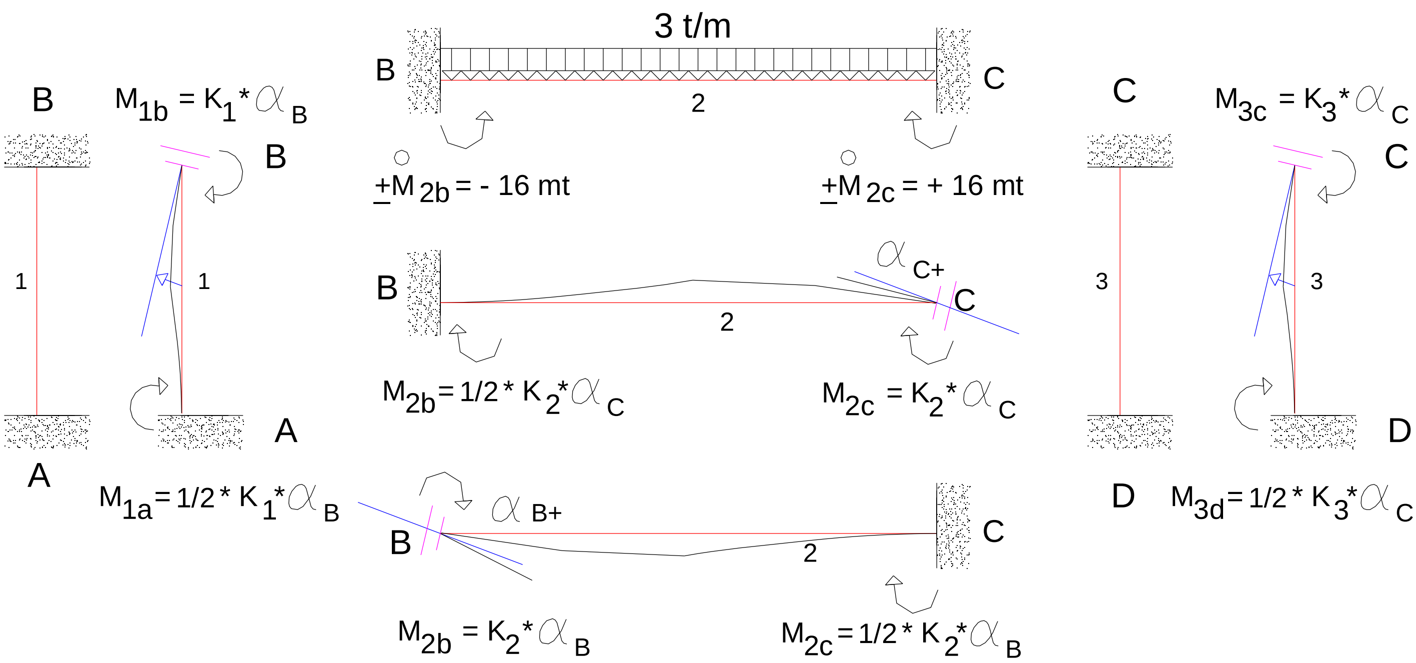
Dos nudos sin desplazamientos. Grado hiperestático por el método de los desplazamientos = 2.

Las incógnitas son: "α_B" y "α_C".

Paso 1º/ Todos los nudos giran en sentido positivo:



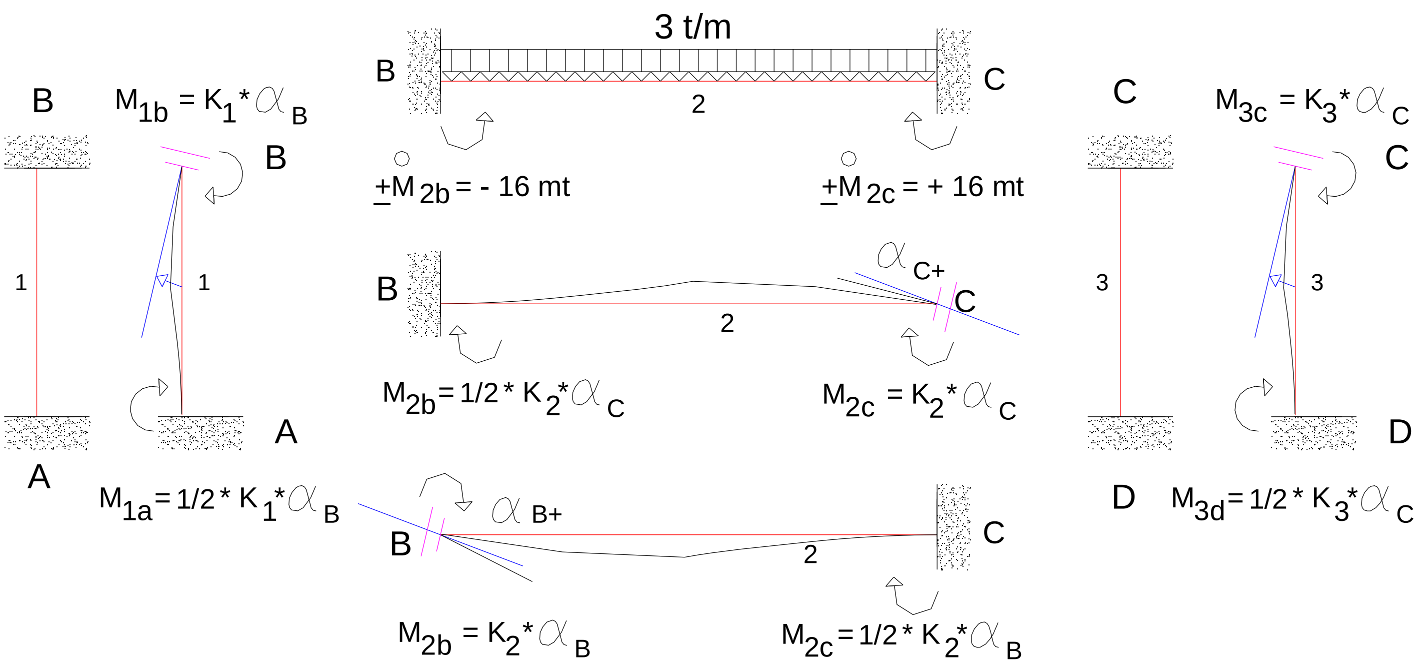
Paso 2º/ Momentos en extremo de barra:



Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ejemplo nº 4: estructura de dos nudos.(método matricial).

Paso 2º/ Momentos en extremo de barra:



Paso 3º/ Equilibrio de momentos en los nudos: $\Sigma M_B = 0$ y $\Sigma M_C = 0$

Matriz rigidez **Vector ?** **Vector cargas nudos**

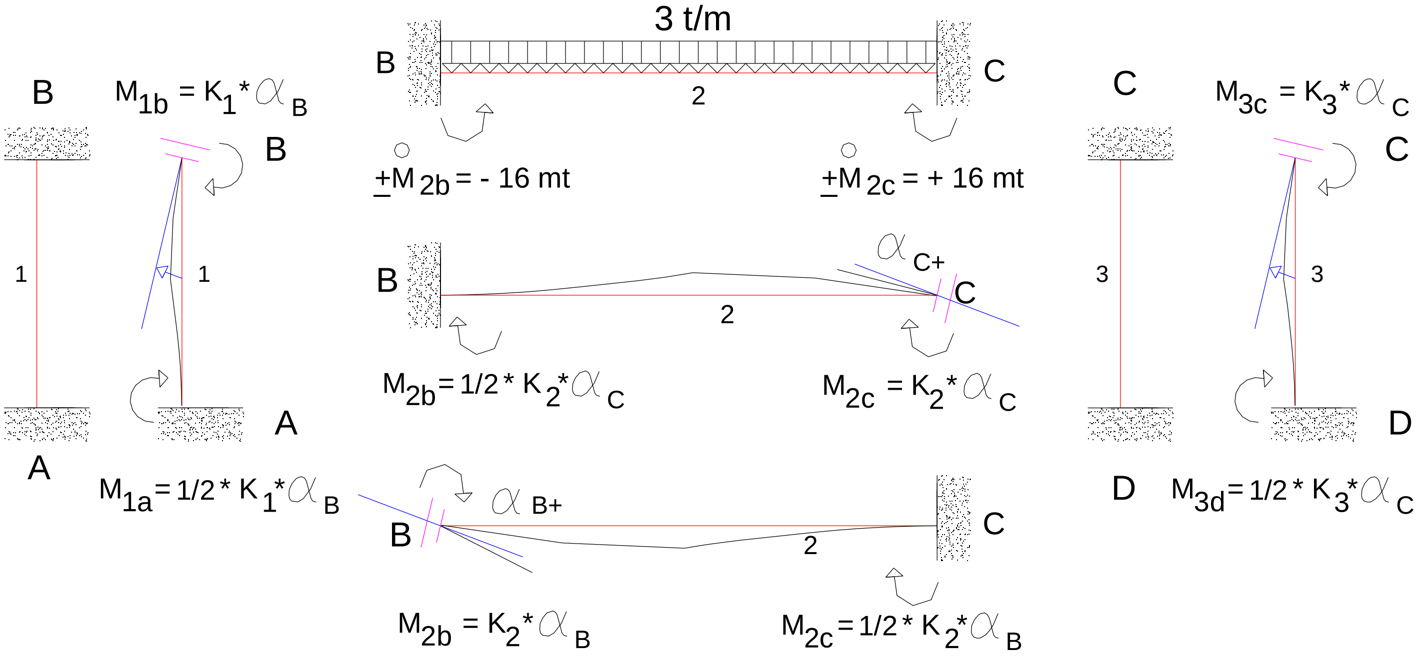
$$\begin{array}{c|cc|} & \alpha_B & \alpha_C \\ \hline \alpha_B & K1 + K2 & 1/2\ K2 \\ \alpha_C & 1/2\ K2 & K2 + K3 \\ \hline \end{array} * \begin{bmatrix} \alpha_B \\ \alpha_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +16 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc|} & \alpha_B & \alpha_C \\ \hline \alpha_B & 1 + 1 & \tfrac{1}{2} * 1 \\ \alpha_C & \tfrac{1}{2} * 1 & 1 + 1 \\ \hline \end{array} * \begin{bmatrix} \alpha_B \\ \alpha_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +16 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Paso 4º/ Cálculo del vector de incógnitas (giro de nudos)

Ejemplo nº 4: estructura de dos nudos.(método matricial).

Paso 2º/ Momentos en extremo de barra:



Paso 3º/ Equilibrio de momentos en los nudos: $\Sigma M_B = 0$ y $\Sigma M_C = 0$

Matriz rigidez — **Vector ?** — **Vector cargas nudos**

$$\begin{array}{cc} \Sigma M_B = 0 & \alpha_B \\ \Sigma M_C = 0 & \alpha_C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_B & \alpha_C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1+1 & \frac{1}{2}*1 \\ \frac{1}{2}*1 & 1+1 \end{bmatrix} \end{array} * \begin{bmatrix} \alpha_B \\ \alpha_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +16 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Paso 4º/ Cálculo vector incógnitas (giro de nudos): $\alpha_B = \mathbf{+10{,}6666/EI}$ $\alpha_C = \mathbf{-10{,}6666}/EI$

Paso 5º/ Momentos definitivos en extremo de barra:

Condiciones de contorno:

$$\boxed{\alpha_A = \alpha_D = 0 \quad \delta = 0}$$

$$M_{1A} = 0,00 + 1*\left(0 + \frac{1}{2}*+10,6666\right) = +5,3\widehat{3}mt$$

$$M_{1B} = 0,00 + 1*\left(+10,6666 + 0*\alpha_A\right) = +10,6\widehat{6}mt$$

$$M_{2B} = -16,00 + 1*\left(+10,6666 + \frac{1}{2}*-10,6666\right) = -10,6\widehat{6}mt$$

$$M_{2C} = +16,00 + 1*\left(-10,6666 + \frac{1}{2}*+10,6666\right) = +10,6\widehat{6}mt$$

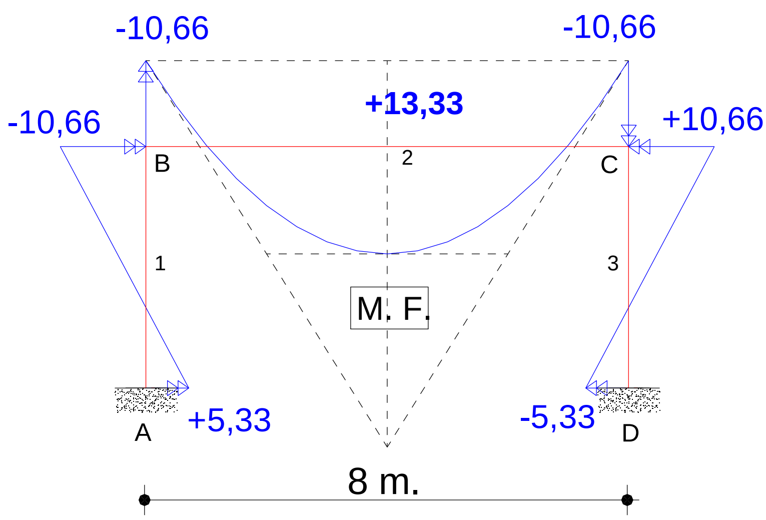
$$M_{3C} = 0,00 + 1*\left(-10,6666 + 0*\alpha_D\right) = -10,6\widehat{6}mt$$

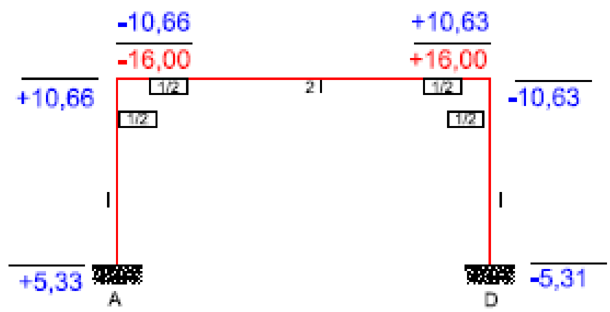
$$M_{3D} = 0,00 + 1*\left(0 + \frac{1}{2}*-10,6666\right) = -5,3\widehat{3}mt$$

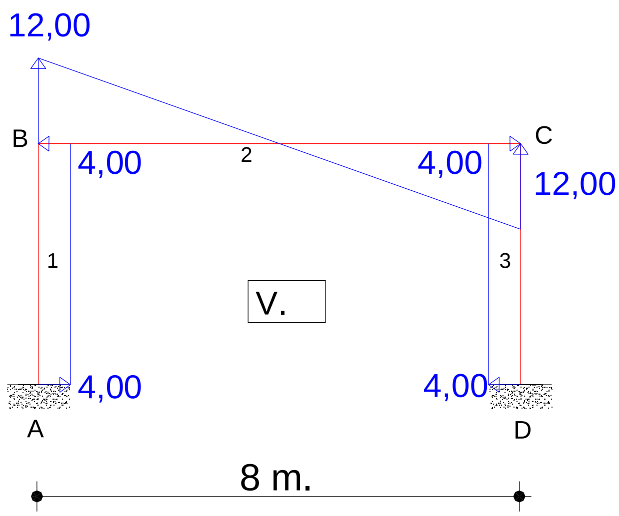
Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

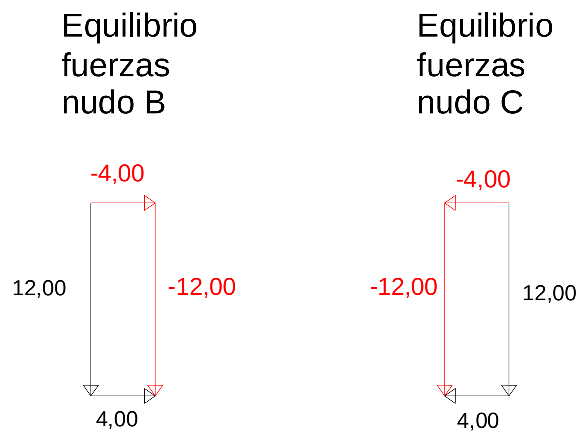
Ejercicio nº 4: El pórtico simple Diagramas (estado 1)

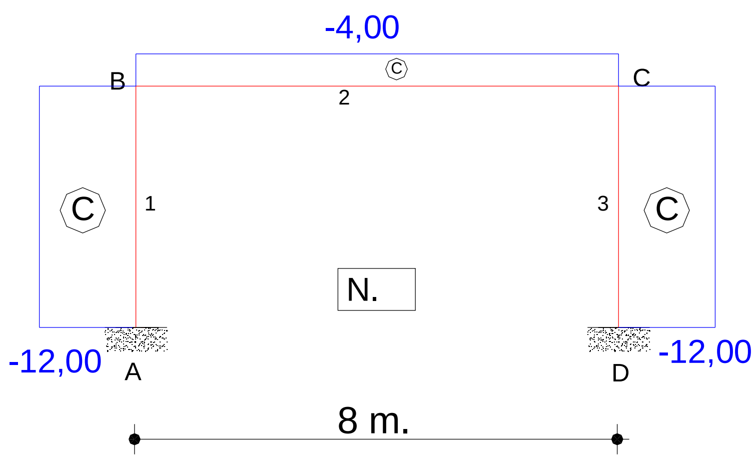
De la estructura croquizada de peso propio despreciable se pide: **diagramas de solicitaciones a escala y acotados.**

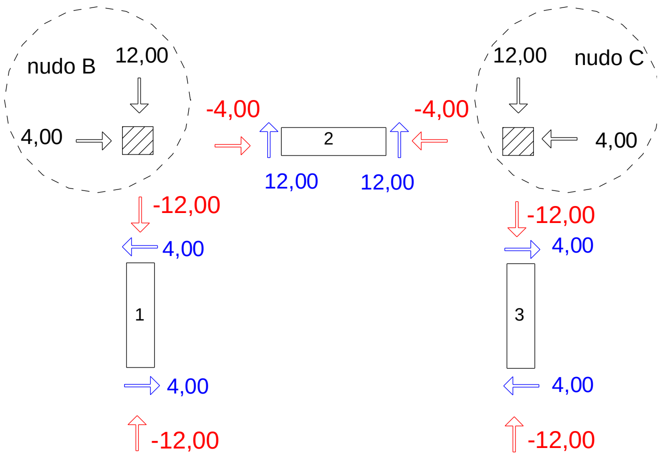








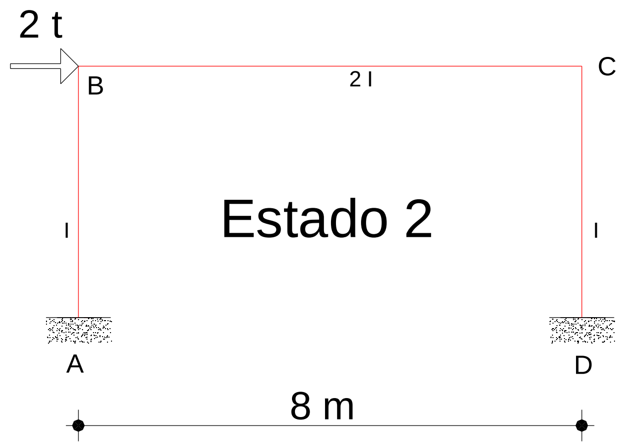


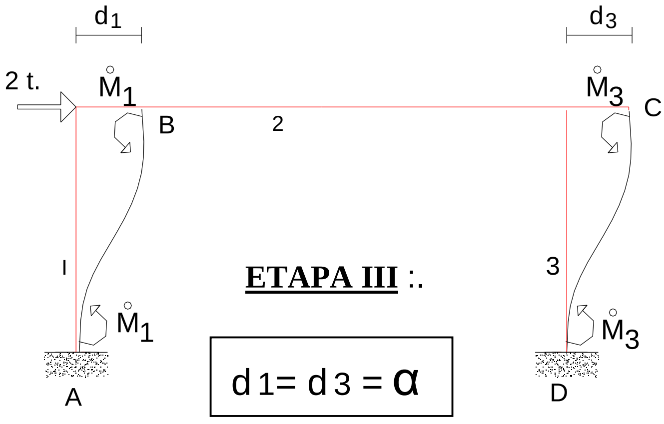


Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

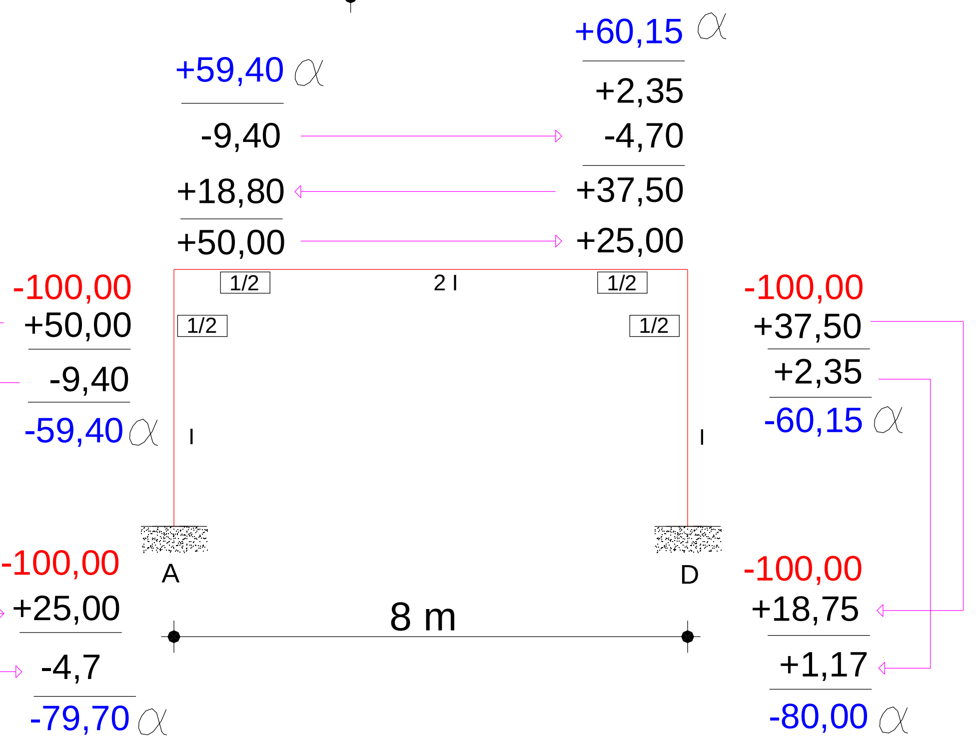
Ejemplo nº 5: el pórtico simple desplazable.(estado 2).

De la estructura croquizada de peso propio despreciable se pide: diagramas de solicitaciones a escala y acotados.

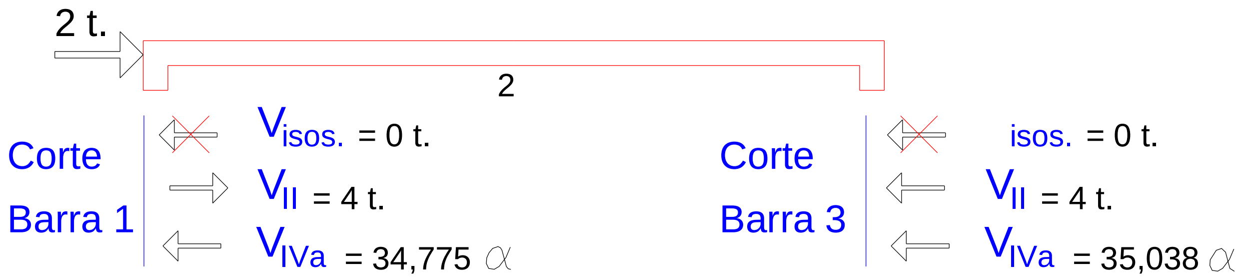




ETAPA IV :.



ETAPA V :.



(-59,40 - 79,70) / 4 = 34,775 α

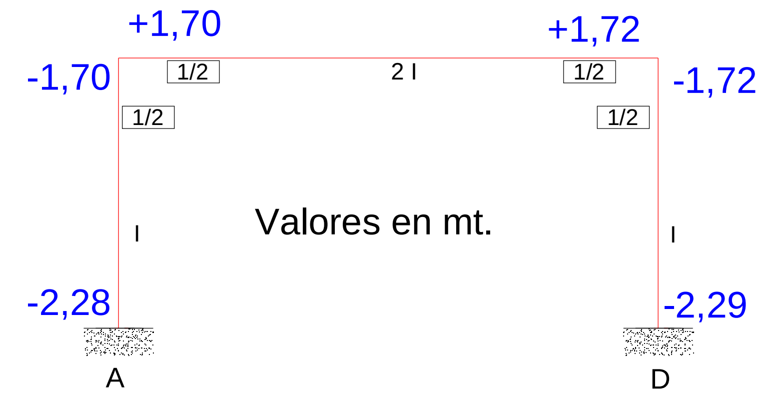
(-60,15 - 80,0) / 4 = 35,038 α

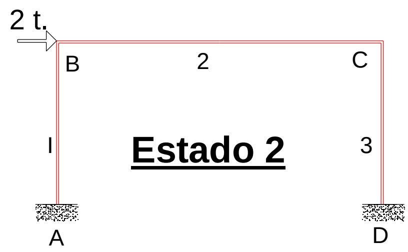
S de fuerzas cortantes + F ext. = 0

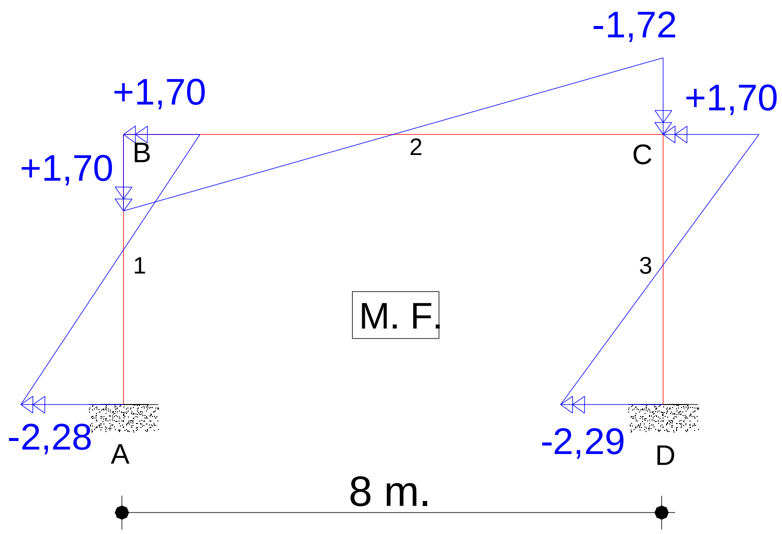
2t -34,775 α - 35,038 α = 0 ? $\boxed{\alpha = +0{,}0286479595491...}$

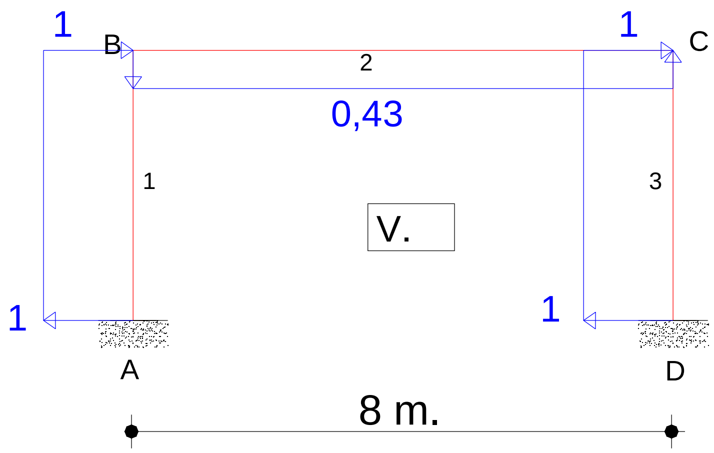
Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

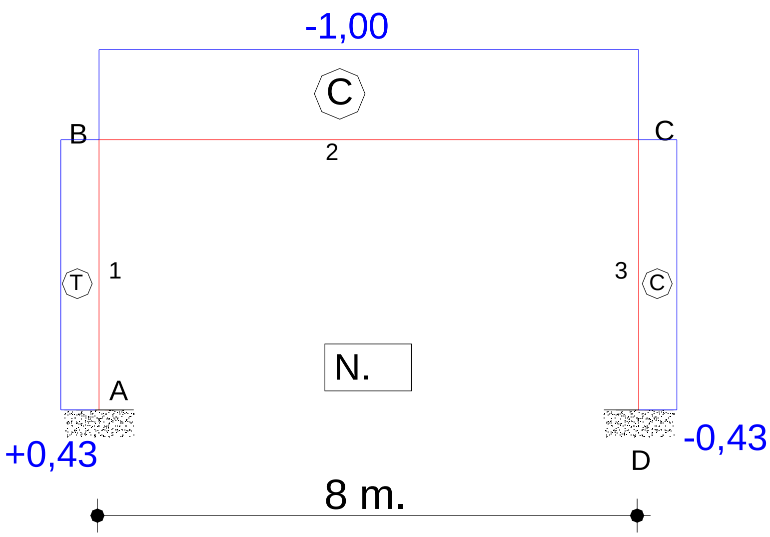
Ejercicio 5, diagramas de viento (v1= viento hacia la derecha)











Diagramas de viento

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

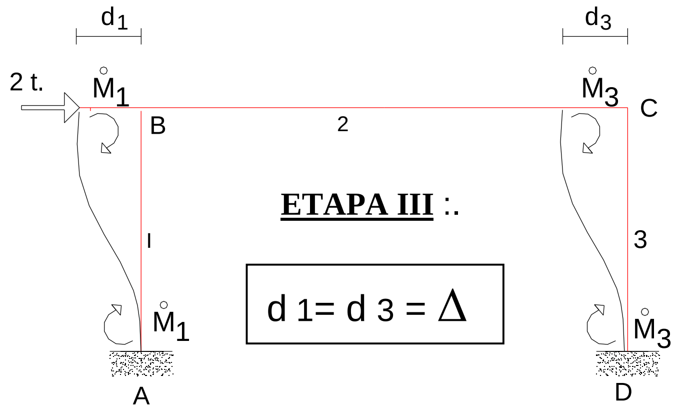
Ejemplo nº 5: pórtico simple desplazable.(método matricial).

Método Matricial.

Dos nudos sin desplazamientos. Grado hiperestático por el método de los desplazamientos = 3.

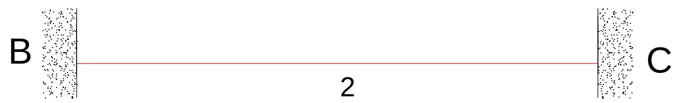
Las incógnitas son: "α_B" "α_C" y "Δ".

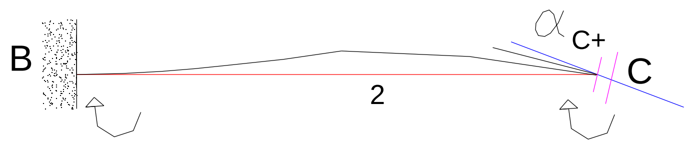
Paso 1º/ Todos los nudos **giran = se desplazan** en sentido positivo, es decir, dan lugar a **M +**:



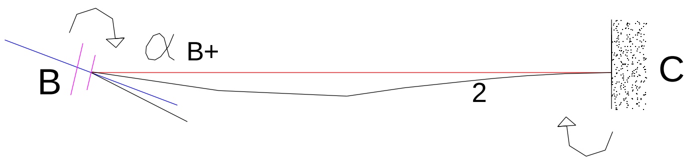
$$d_1 = d_3 = \Delta$$

Paso 2º/ Momentos en extremo de barra:





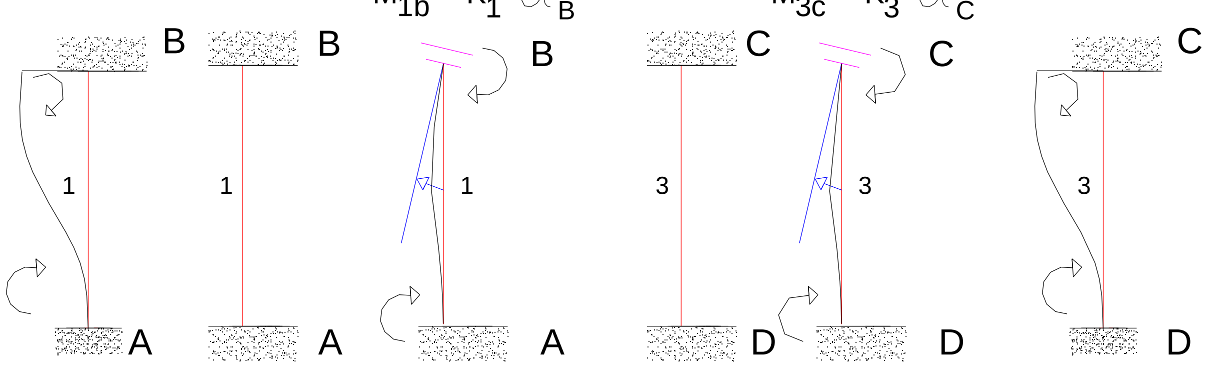
$M_{2b} = 1/2 * K_2 * \alpha_C$ $M_{2c} = K_2 * \alpha_C$



$M_{2b} = K_2 * \alpha_B$ $M_{2c} = 1/2 * K_2 * \alpha_B$

$d_1 = \Delta$ $d_3 = \Delta$

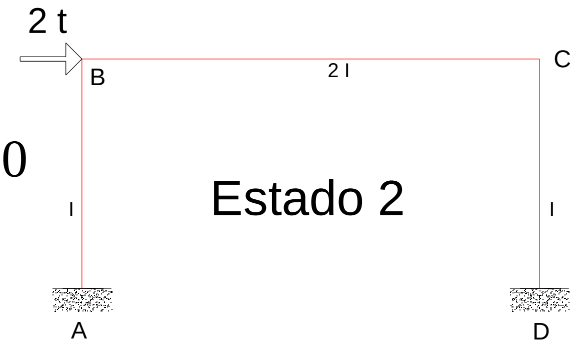
$M_{1a} = 1{,}5 * K_1 * \Delta / L_1$ $M_{1b} = K_1 * \alpha_B$ $M_{3c} = K_3 * \alpha_C$ $M_{3c} = 1{,}5 * K_3 * \Delta / L_3$



$M_{1a} = 1{,}5 * K_1 * \Delta / L_1$ $M_{1a} = 1/2 * K_1 * \alpha_B$ $M_{3d} = 1/2 * K_3 * \alpha_C$ $M_{3d} = 1{,}5 * K_3 * \Delta / L_3$

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

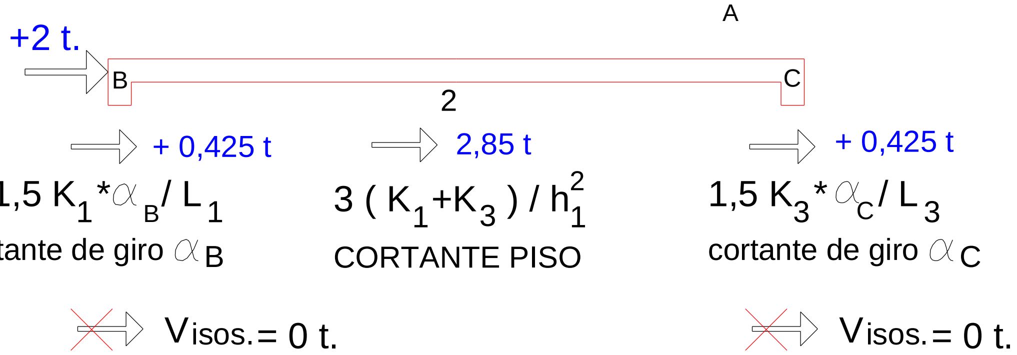
Ejemplo nº 5: pórtico simple desplazable.(método matricial).



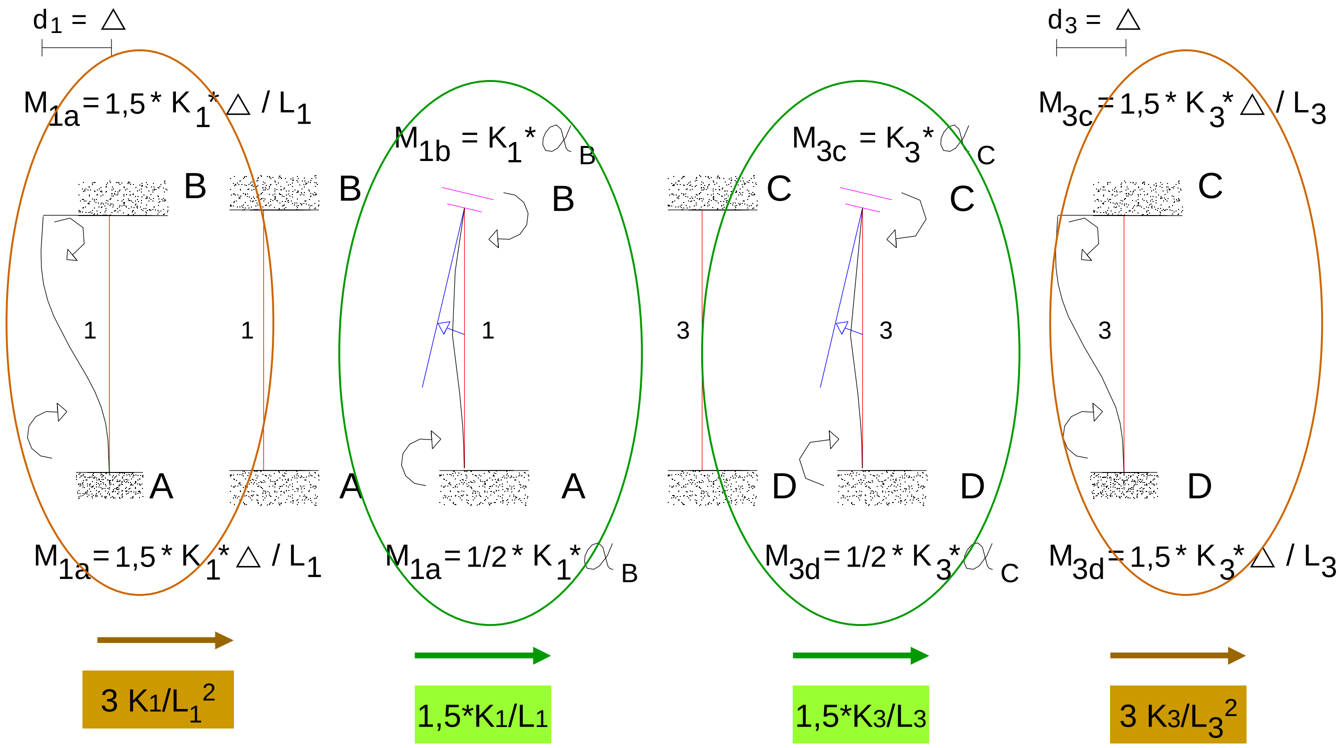
Paso 3º/ Equilibrio de momentos en los nudos:

$\Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \quad y \qquad \Sigma Fh = 0$

Hay que introducir en el método matricial la ecuación de equilibrio del dintel



		Matriz rigidez α_B	α_C	Δ		Vector ?		Vector cargas nudos
$\Sigma M_B = 0$	α_B	1 + 1	½ * 1	1,5*K1/L1		α_B		0,00
$\Sigma M_C = 0$	α_C	½ * 1	1 + 1	1,5*K3/L3	*	α_C	=	0,00
$\Sigma Fh = 0$	Δ	1,5*K1/L1	1,5*K3/L3	$3(K_1+K_3)/L^2$		Δ		–2,00

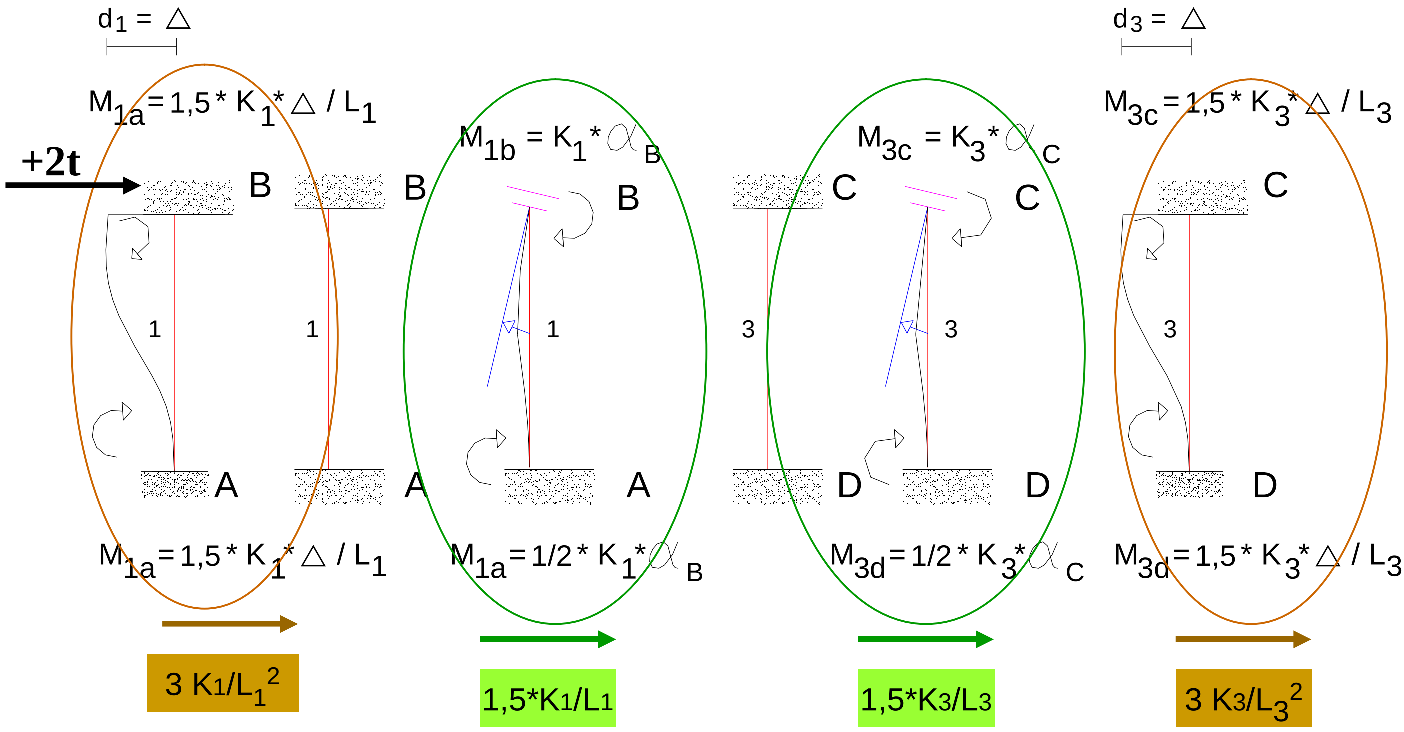


Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ejemplo nº 5: pórtico simple desplazable.(método matricial).

Matriz rigidez — Vector ? — Vector cargas nudos

$$
\begin{array}{ll}
 & \\
\Sigma M_B = 0 & \alpha_B \\
\Sigma M_C = 0 & \alpha_C \\
\Sigma Fh = 0 & \Delta
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \alpha_B & \alpha_C & \Delta \end{array} \\
\begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0,375 \\ 0,5 & 2 & 0,375 \\ 0,375 & 0,375 & \mathbf{0,375} \end{bmatrix}
\end{array}
*
\begin{bmatrix} \alpha_B \\ \alpha_C \\ \Delta \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ -2,00 \end{bmatrix}
$$



Paso 4º/ Cálculo vector de incógnitas: $\alpha_B = \alpha_C = +1,1439/EI$ $\Delta = -7,6190/EI$

Paso 5º/ Momentos definitivos en extremo de barra:

Condiciones de contorno:

$$\boxed{\alpha_A = \alpha_D = 0}$$

$$M_{1A} = 0,00 + 1*\left(0 + \frac{1}{2} * +1,1439 + 1,5 * -7,6190/4\right) = -2,29mt$$

$$M_{1B} = 0,00 + 1*\left(+1,1439 + 0 * \alpha_A + 1,5 * -7,6190/4\right) = -1,71mt$$

$$M_{2B} = 0,00 + 1*\left(+1,1439 + \frac{1}{2} * +1,1439 + 1,5 * 0/8\right) = +1,71mt$$

$$M_{2C} = 0,00 + 1*\left(+1,1439 + \frac{1}{2} * +1,1439 + 1,5 * 0/8\right) = +1,71mt$$

$$M_{3C} = 0,00 + 1*\left(+1,1439 + 0 * \alpha_D + 1,5 * -7,6190/4\right) = -1,71mt$$

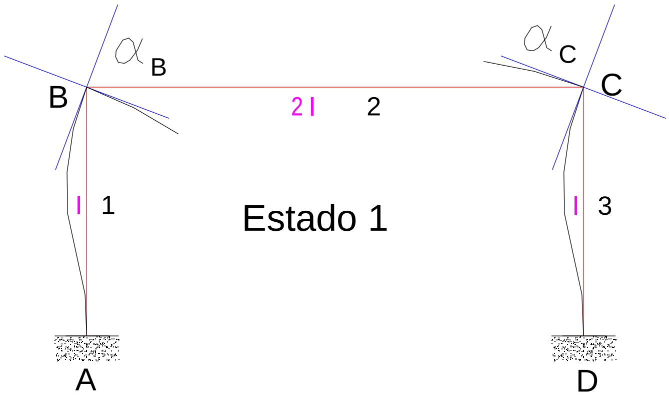
$$M_{3D} = 0,00 + 1*\left(0 + \frac{1}{2} * +1,1439 + 1,5 * -7,6190/4\right) = -2,29mt$$

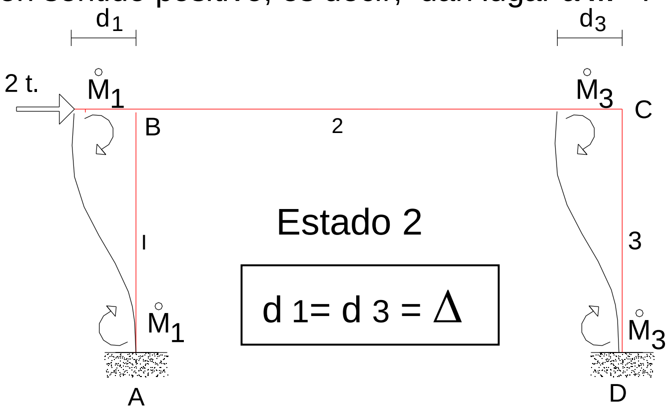
Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ejemplo nº 6 = 4 + 5: pórtico simple completo.(método matricial).

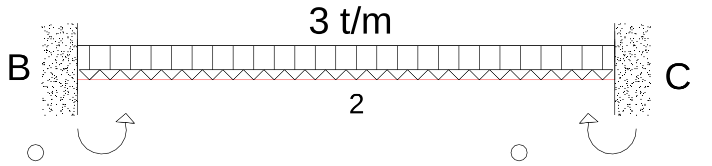
Método Matricial.. Las incógnitas son: "α_B" "α_C" y "Δ".

Paso 1º/ Todos los nudos **giran o se desplazan** en sentido positivo, es decir, dan lugar a **M +**:

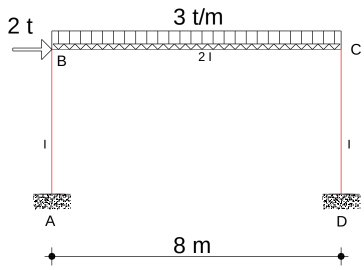


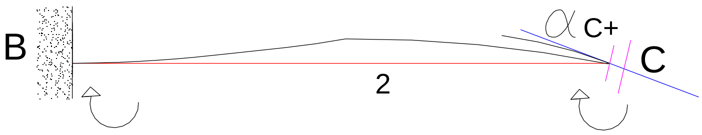


Paso 2º/ Momentos en extremo de barra:

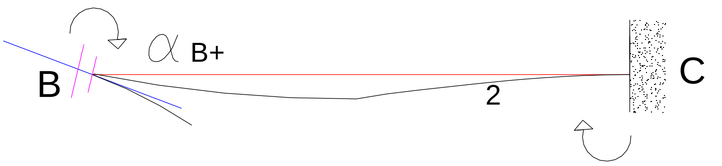


$\pm M_{2b} = - 16$ mt $\qquad \pm M_{2c} = + 16$ mt





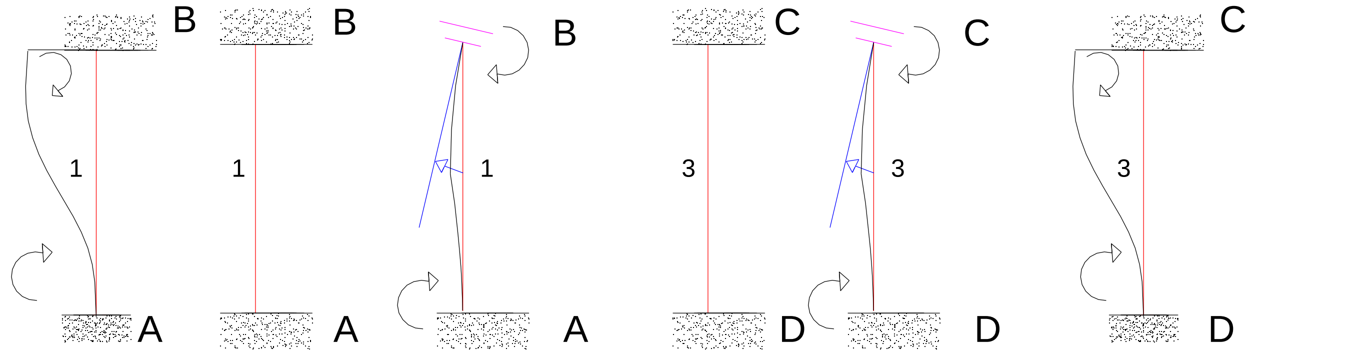
$M_{2b} = 1/2 * K_2 * \alpha_C \qquad M_{2c} = K_2 * \alpha_C$



$M_{2b} = K_2 * \alpha_B \qquad M_{2c} = 1/2 * K_2 * \alpha_B$

$d_1 = \triangle \qquad d_3 = \triangle$

$M_{1a} = 1{,}5 * K_1 * \triangle / L_1 \qquad M_{1b} = K_1 * \alpha_B \qquad M_{3c} = K_3 * \alpha_C \qquad M_{3c} = 1{,}5 * K_3 * \triangle / L_3$

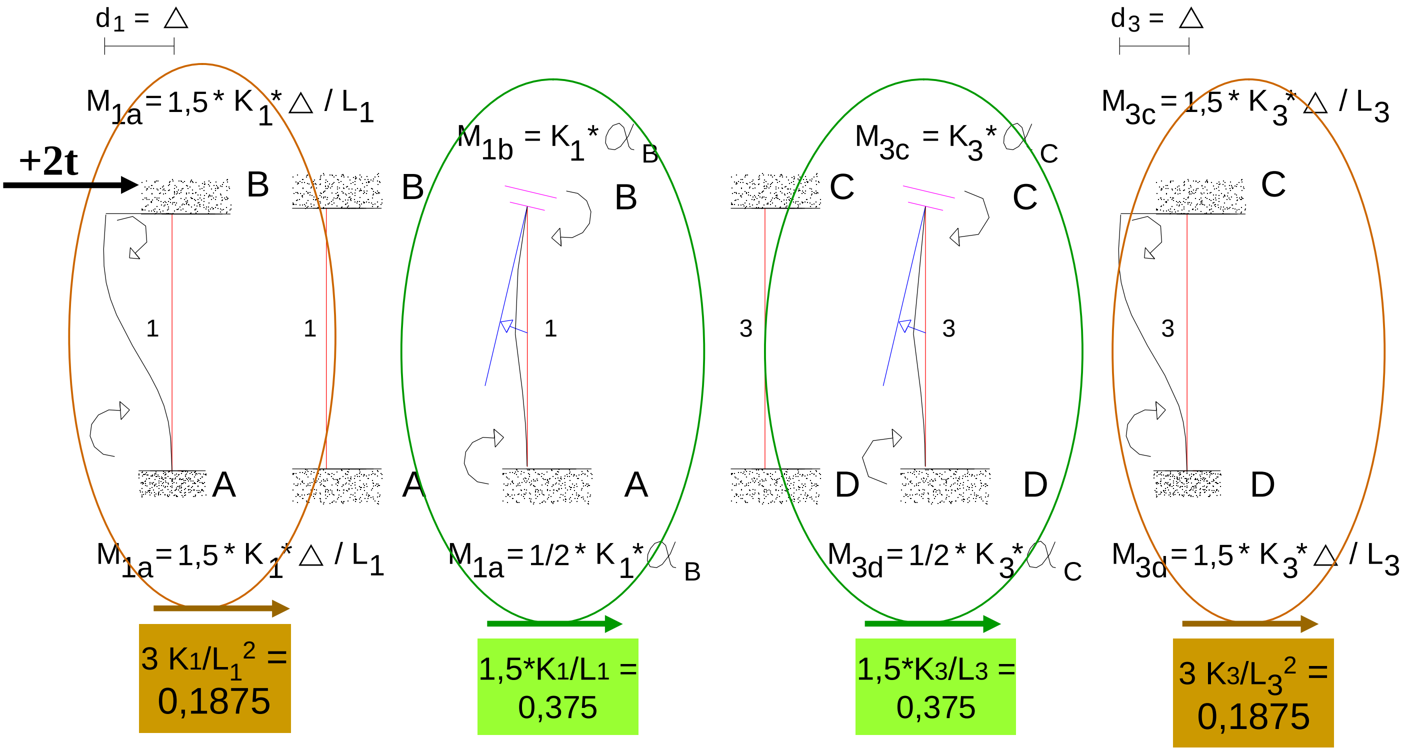


$M_{1a} = 1{,}5 * K_1 * \triangle / L_1 \qquad M_{1a} = 1/2 * K_1 * \alpha_B \qquad M_{3d} = 1/2 * K_3 * \alpha_C \qquad M_{3d} = 1{,}5 * K_3 * \triangle / L_3$

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ejemplo nº 6: pórtico simple completo.(superposición).

		Matriz rigidez α_B	α_C	Δ		Vector ?		Vector cargas nudos
$\Sigma M_B = 0$	α_B	2	0,5	0,375		α_B		+16,00
$\Sigma M_C = 0$	α_C	0,5	2	0,375	*	α_C	=	–16,00
$\Sigma Fh = 0$	Δ	0,375	0,375	**0,375**		Δ		–2,00



Paso 4º/ Cálculo de incógnitas: α_B = +11,8095/EI α_C= -9,5238/EI Δ = -7,6190/EI

Paso 5º/ Momentos definitivos en extremo de barra:

Condiciones de contorno: $\boxed{\alpha_A = \alpha_D = 0}$

$$M_{1A} = 0,00 + 1*\left(0 + \frac{1}{2}*+11,8095 + 1,5*-7,6190/4\right) = +3,05mt$$

$$M_{1B} = 0,00 + 1*\left(+11,8095 + 0*\alpha_A + 1,5*-7,6190/4\right) = +8,95mt$$

$$M_{2B} = -16,00 + 1*\left(+11,8095 + \frac{1}{2}*-9,5238 + 1,5*0/8\right) = -8,95mt$$

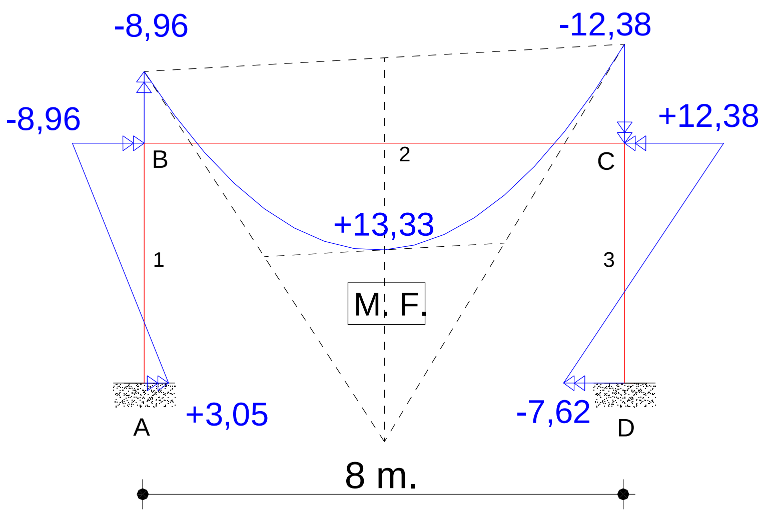
$$M_{2C} = +16,00 + 1*\left(-9,5238 + \frac{1}{2}*+11,8095 + 1,5*0/8\right) = +12,38mt$$

$$M_{3C} = 0,00 + 1*\left(-9,5238 + 0*\alpha_D + 1,5*-7,6190/4\right) = -12,38mt$$

$$M_{3D} = 0,00 + 1*\left(0 + \frac{1}{2}*-9,5238 + 1,5*-7,6190/4\right) = -7,62mt$$

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ejercicios 6 = 4 + 5 , diagramas definitivos o de Cross



Ejercicios nº 4 + 5:

Acción gravitatoria + acción viento

<u>Acciones permanentes</u>: carga gravitatoria.

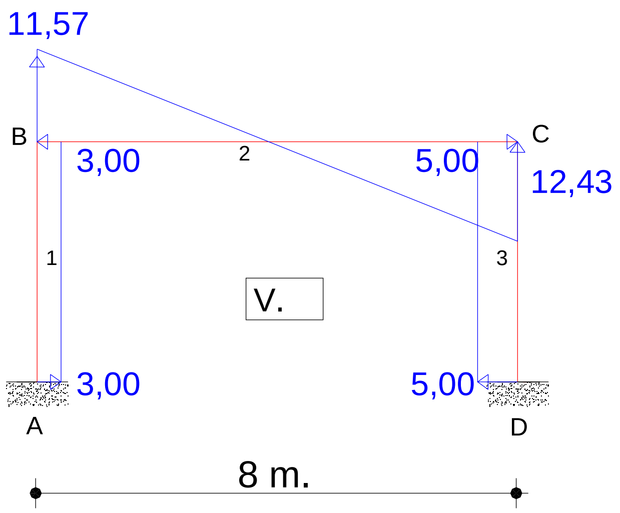
G Carga permanentes.

+

Q Carga variable.

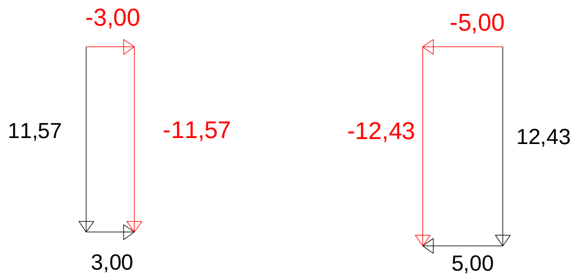
<u>Acción variable</u>:

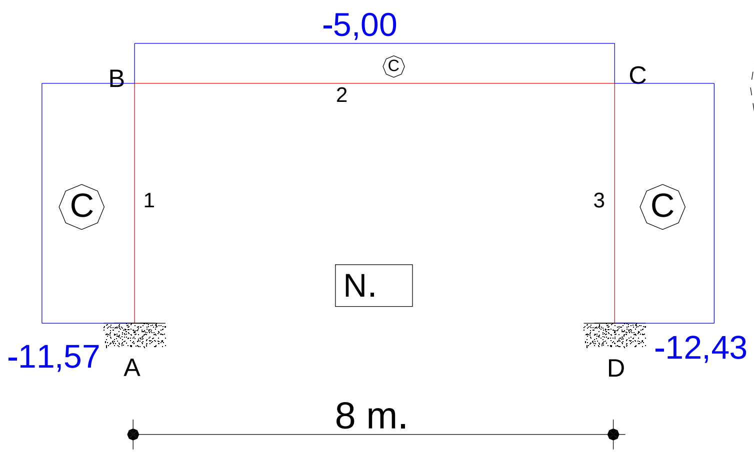
V 1 sobrecarga viento V1.

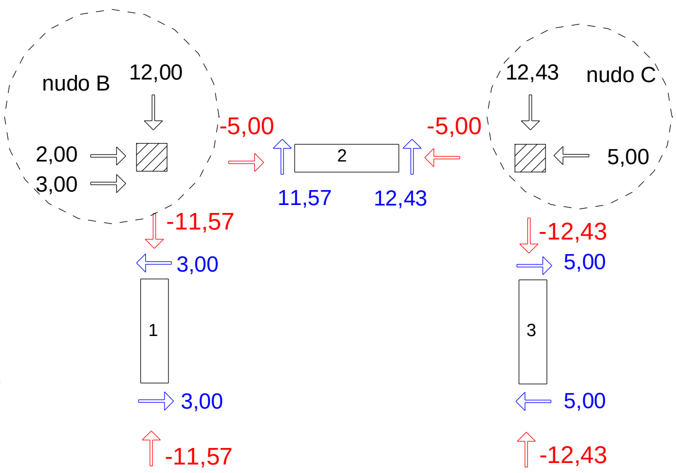


Equilibrio fuerzas nudo B

Equilibrio fuerzas nudo C



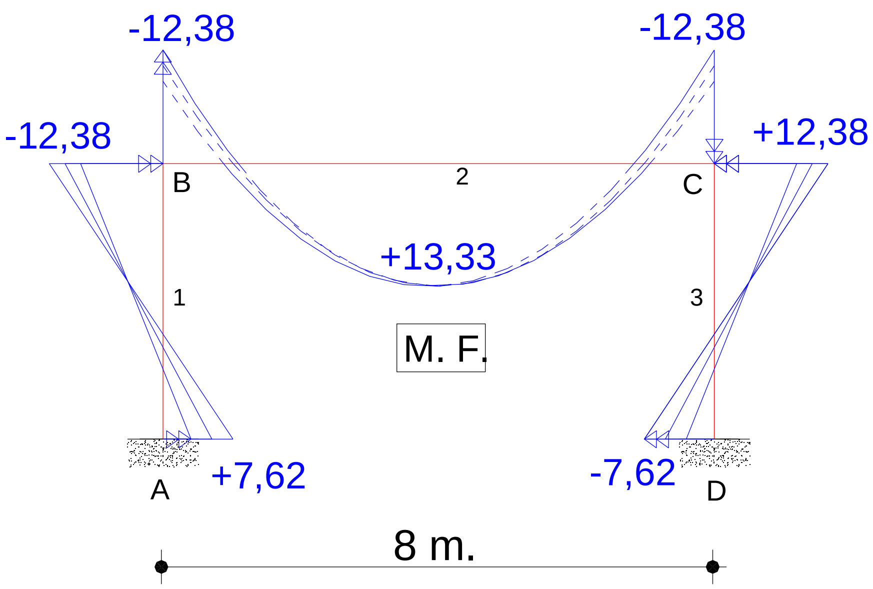




Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Pórtico simple: Combinación de Acciones

Envolvente de solicitaciones



Diagramas para dimensionado y/o armado

Pórtico simple

Acción gravitatoria + acción viento

Acciones permanentes: carga gravitatoria.

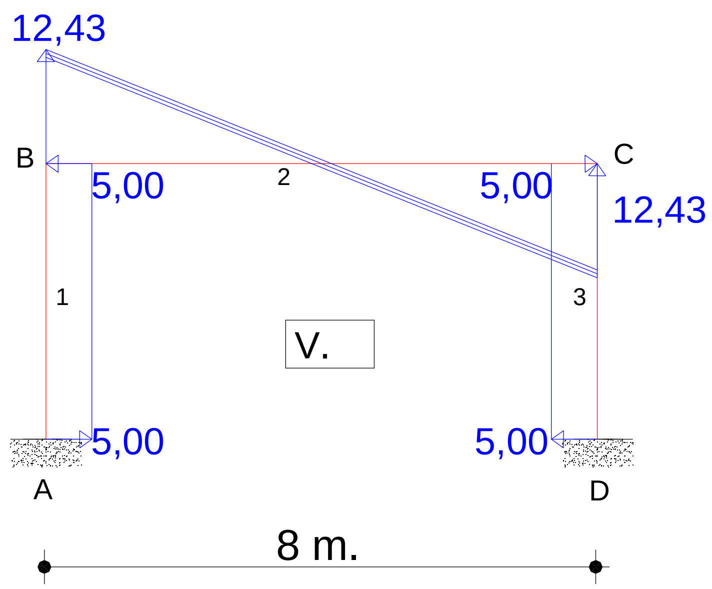
G Carga permanentes.

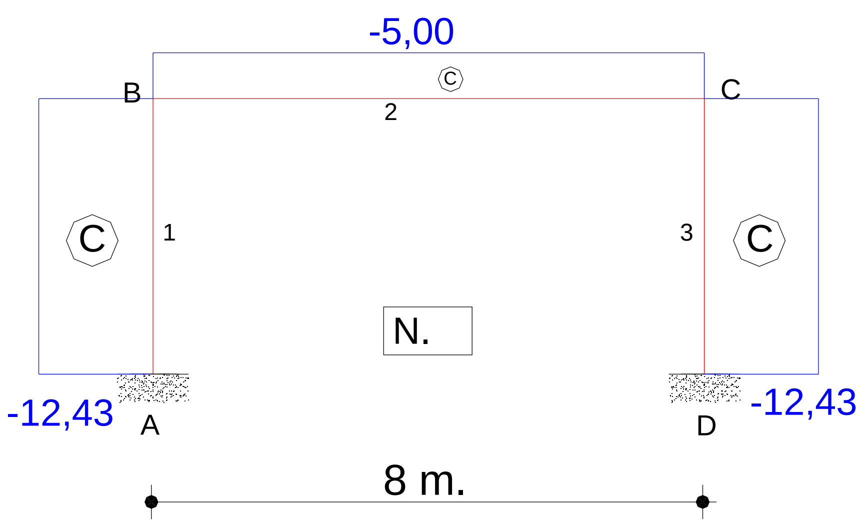
Q Carga variable.

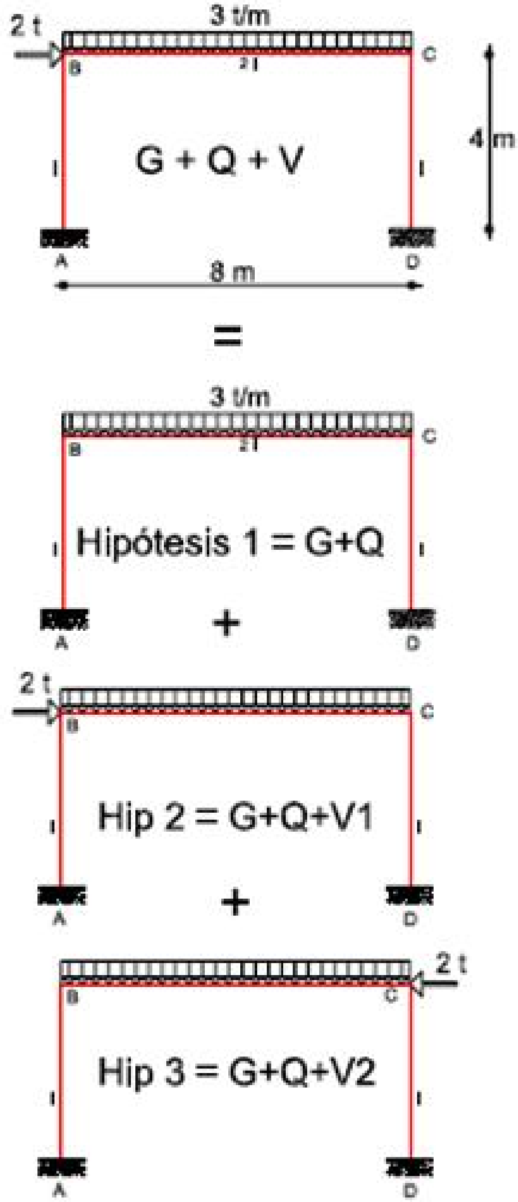
Acción variable:

V 1 sobrecarga viento V1.

V 2 sobrecarga viento V2 .



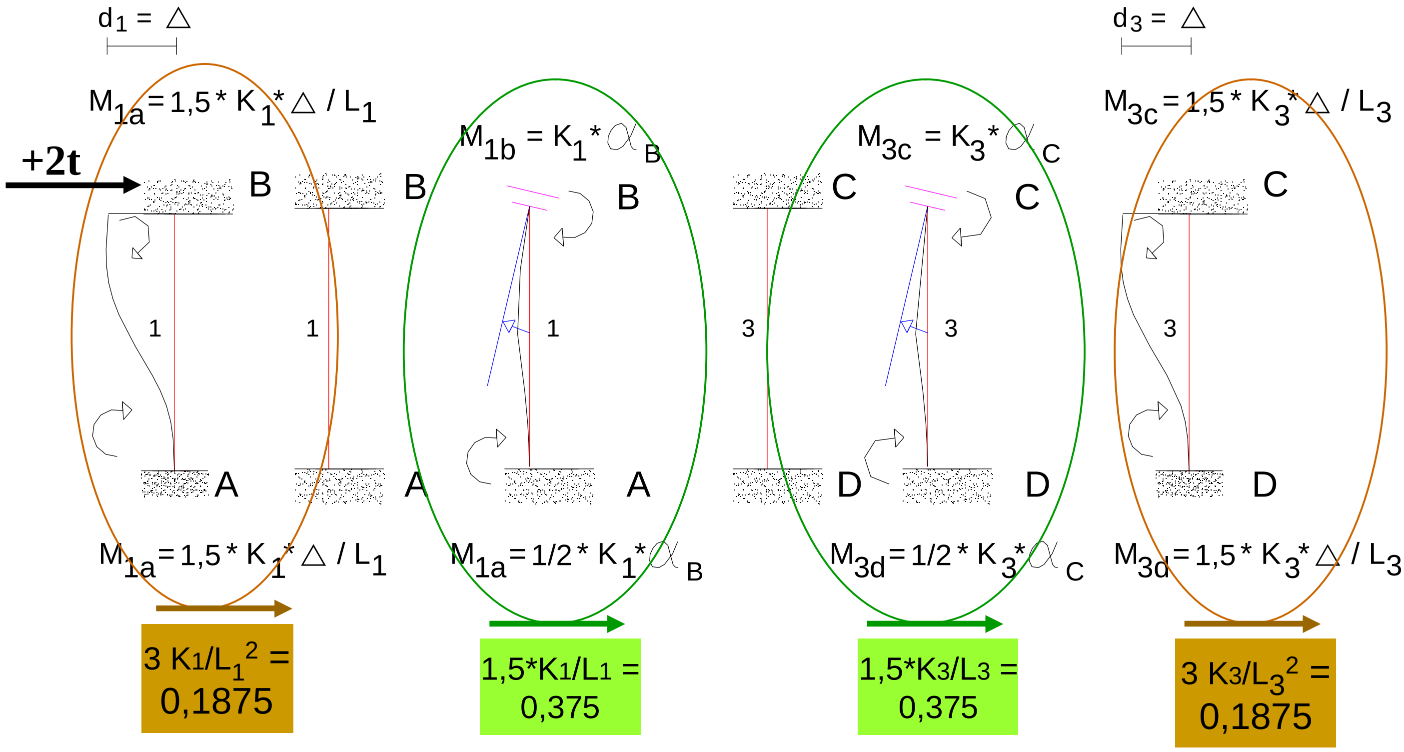




Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Características de la matriz de rigidez y sobre el método matricial.

		Matriz rigidez				Vector ?		Vector cargas nudos
		α_B	α_C	Δ				
$\Sigma M_B = 0$	α_B	2	0,5	0,375		α_B		+16,00
$\Sigma M_C = 0$	α_C	0,5	2	0,375	*	α_C	=	–16,00
$\Sigma Fh = 0$	Δ	0,375	0,375	**0,375**		Δ		–2,00



1º/ Es un invariante estructural, una vez formulado representa a la estructura y a cualquier otra que sea geométricamente semejante (igual relación de rigideces en los nudos).

2º/ Si se quiere analizar otra hipótesis de carga es suficiente con cambiar el vector de cargas.

3º/ La matriz de rigidez tiente cuatro submatrices:

a/ **Submatriz de giros y trasmisiones** en la diagonal principal están las sumas de rigideces de las barras concurrentes en los nudos.

Las demás casillas contienen las trasmisiones correspondientes.

b/ **Submatriz de MEP en los nudos debidos a desplazamientos de planta** (etapa III de Cross).

c/ **Submatriz de fuerzas** que equilibran la suma de momentos en los extremos de los pilares debidas a los giros.

d/ **Submatriz de fuerzas** (**rigidez de planta**) que equilibran la suma de momentos en los extremos de los pilares debidas al desplazamiento de la planta correspondiente..

4º/ La matriz de rigidez es simétrica, y suponiendo giros y desplazamientos + todos los números que la componen son positivos.

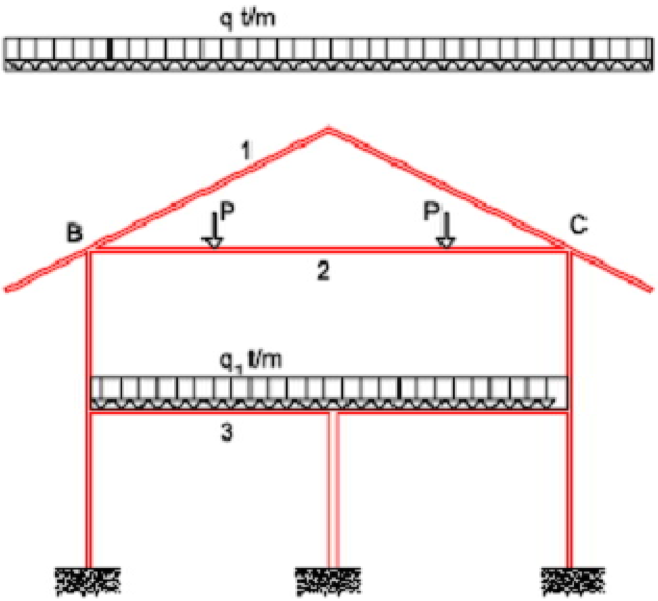
Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

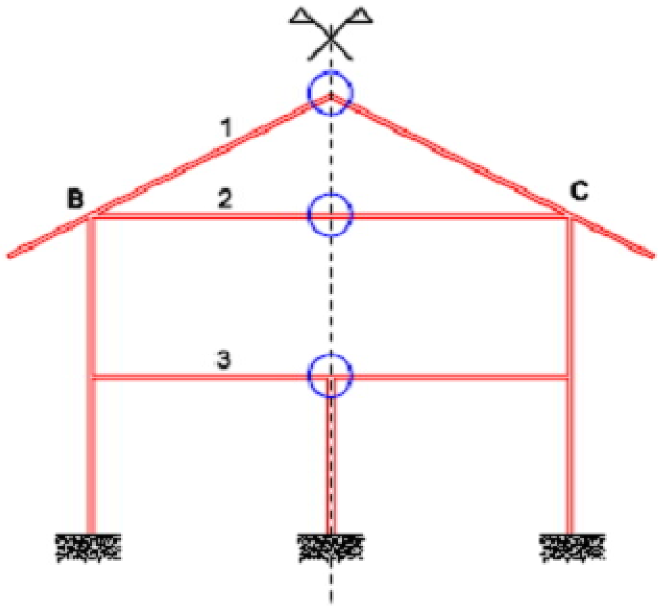
Resumen Simplificaciones de Simetría de forma y carga

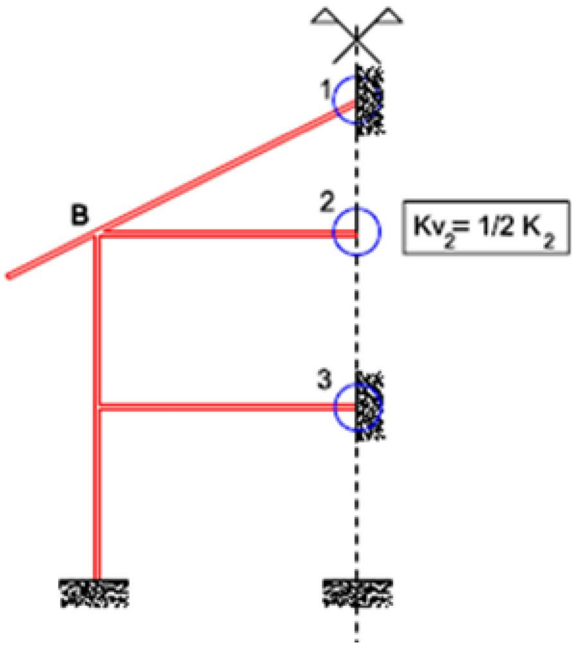
El eje de simetría corta a la estructura por:

1/ Un nudo con 2 barras.
2/ El centro de una barra perpendicular a la directriz.
3/ Un nudo con viga continua sobre pilar

Esquema de simetría







El eje de simetría corta a la estructura por:

1/ Un nudo con 2 barras.
El giro del nudo es nulo<> equivale a un empotramiento para la etapa II de Cross.
.
2/ El centro de una barra perpendicular a la directriz.
Se utiliza una rigidez virtual equivalente al 50% de la rigidez real. (sólo cambia los factores de reparto).

3/ Un nudo con viga continua sobre un pilar.
El giro del nudo es nulo. Una viga empotra a la otra <> equivale a un empotramiento y el pilar sólo toma la solicitación axil.

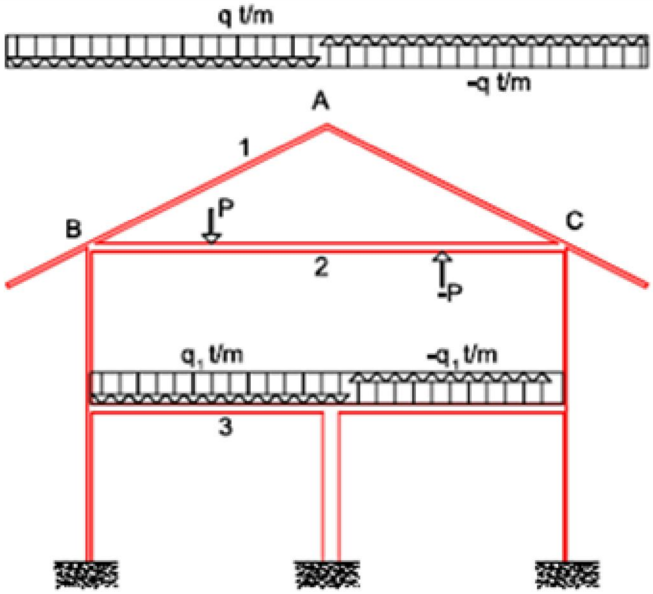
Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

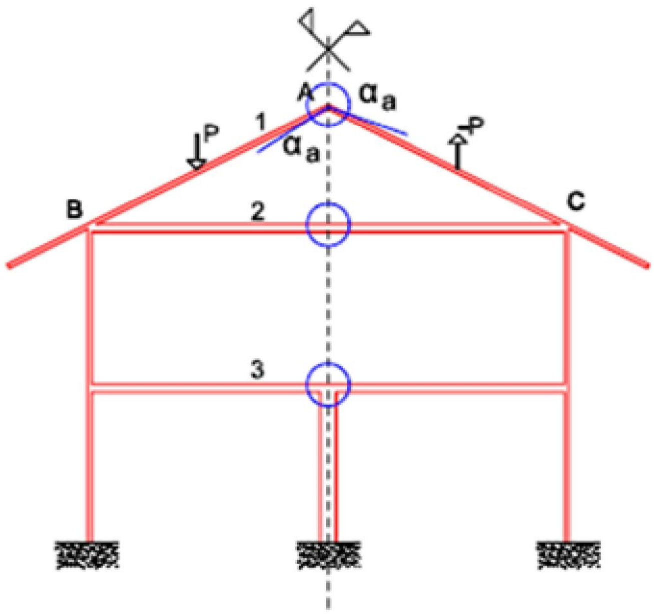
<u>Resumen Simplificaciones de ***Antisimetría de carga***</u>

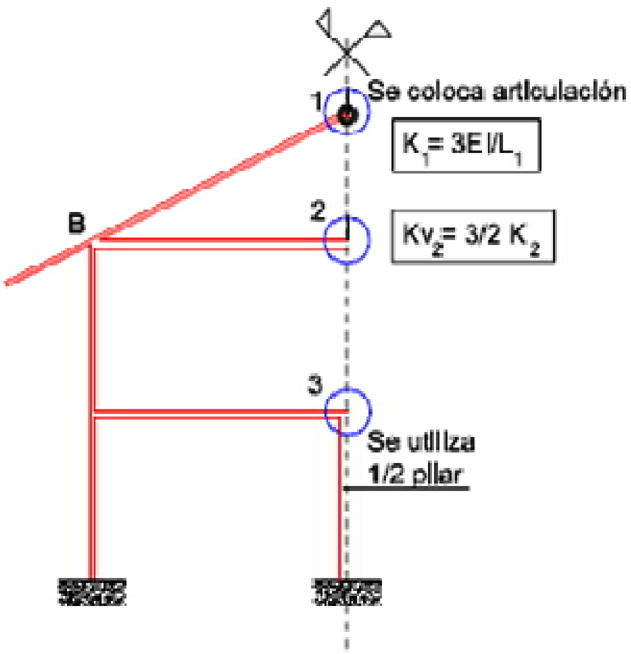
<u>El eje de simetría corta a la estructura por:</u>

1/ Un nudo con 2 barras.
2/ El centro de una barra perpendicular a la directriz.
3/ Un nudo con viga continua sobre pilar

Esquema de Antisisimetría







El eje de antisimetría corta a la estructura por:

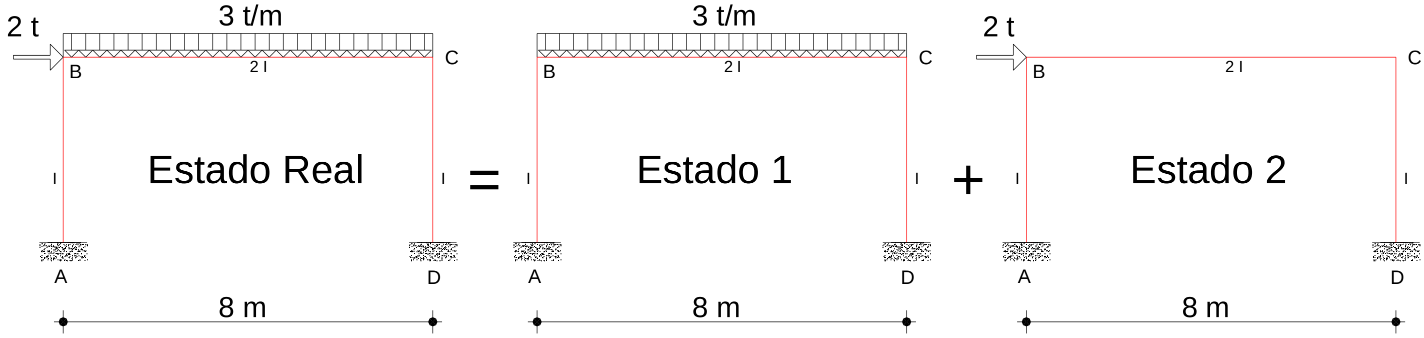
1/ Un nudo con 2 barras.
No hay oposición al giro, una barra no empotra a la otra. Se coloca una articulación en el nudo A, y la rigidez de la barra 1 es 3EI/L.

2/ El centro de una barra perpendicular a la directriz.
Se utiliza una rigidez virtual equivalente al 150% de la rigidez real. (sólo cambian los factores de reparto).

3/ Un nudo con viga continua sobre un pilar.
Como el eje de antisimetría corta longitudinalmente al pilar, queda medio pilar. Se utiliza la rigidez correspondiente ½ pilar.

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)

Ejercicio nº 7: El pórtico simple con simplificaciones



Paso 3.1º/ (Estado 1).

Momentos en extremo de barra del estado 1 con simplificaciones de simetría:

$$\Sigma M_B = 0 \qquad \begin{array}{c|c|} & \alpha_B \\ \alpha_B & 1+0,5 \end{array} \; * \; \begin{bmatrix} \alpha_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +16,00 \end{bmatrix}$$

Paso 4.1º/ Cálculo de incógnitas: α_B = +10,6666 α_C= -10,6666 Δ = 0,00

Paso 3.2º/ (Estado 2).

Momentos en extremo de barra del estado 1 con simplificaciones de antisimetría:

$$\begin{array}{l} \Sigma M_B = 0 \\ \Sigma Fh = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|} & \alpha_B & \Delta \\ \alpha_B & 1+1,5 & 0,375 \\ \Delta & 0,375 & 0,1875 \end{array} \; * \; \begin{bmatrix} \alpha_B \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -1,00 \end{bmatrix}$$

Paso 4.2º/ Cálculo de incógnitas: α_B = +1,1429 α_C= +1,1429 Δ = -7,6190

<u>Paso 4º</u>/ Superponiendo resultados: α_B **= +11,8095**/EI α_C**= – 9,5238**/EI Δ **= -7,6190**/EI

<u>Paso 5º</u>/ Momentos definitivos en extremo de barra:

Condiciones de contorno:

$$\boxed{\alpha_A = \alpha_D = 0}$$

$$M_{1A} = 0,00 + 1 * \left(0 + \frac{1}{2} * +11,8095 + 1,5 * -7,6190/4 \right) = +3,05mt$$

$$M_{1B} = 0,00 + 1 * \left(+11,8095 + 0 * \alpha_A + 1,5 * -7,6190/4 \right) = +8,95mt$$

$$M_{2B} = -16,00 + 1 * \left(+11,8095 + \frac{1}{2} * -9,5238 + 1,5 * 0/8 \right) = -8,95mt$$

$$M_{2C} = +16,00 + 1 * \left(-9,5238 + \frac{1}{2} * +11,8095 + 1,5 * 0/8 \right) = +12,38mt$$

$$M_{3C} = 0,00 + 1 * \left(-9,5238 + 0 * \alpha_D + 1,5 * -7,6190/4 \right) = -12,38mt$$

$$M_{3D} = 0,00 + 1 * \left(0 + \frac{1}{2} * -9,5238 + 1,5 * -7,6190/4 \right) = -7,62mt$$

Tomás Cabrera (E.U.A.T.M.)