Estructuras articuladas 2D (tracción y compresión)

El nudo articulado (acero, madera) frente al nudo rígido

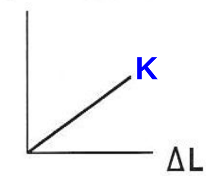
•Movimientos del nudo en el plano:

•***Las barras giran libremente en los nudos,*** por tanto el giro del nudo no afecta a las barras.

•***El nudo se desplaza***, este movimiento se descompone en dos direcciones ortogonales, uno en la directriz de la barra y otro perpendicular a la directriz .

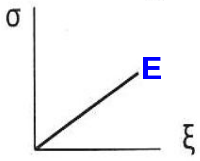
La ley de Hooke

Hooke



$F = K * \Delta L$

Young



$F/A = \sigma$ y $\Delta L/L = \xi$

$\boxed{\sigma = E * \xi}$

$$F = K * \Delta L = \frac{E * A}{L} * \Delta L \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{A} = E * \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \sigma = E * \xi$$

Para un acero de características

$$\sigma = 2000 Kp / cm^2$$

$$E = 2 * 10^6 kp / cm^2$$

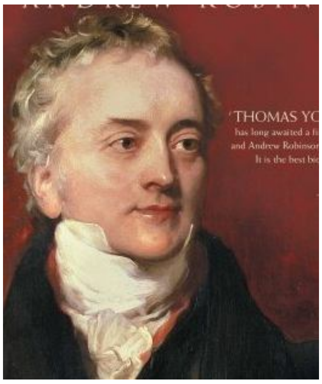
$$\Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{1000}$$

$$2000 = \frac{1}{1000} 2 * 10^6$$

$$Con \qquad (L = 5m)$$

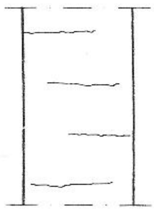
$$\Rightarrow \Delta L = L * \xi = 500 \frac{1}{1000} = 0,5 cm$$

Robert Hooke (1635-1703)



Thomas Young (1773-1829)

Fisuración en pilares por tracción

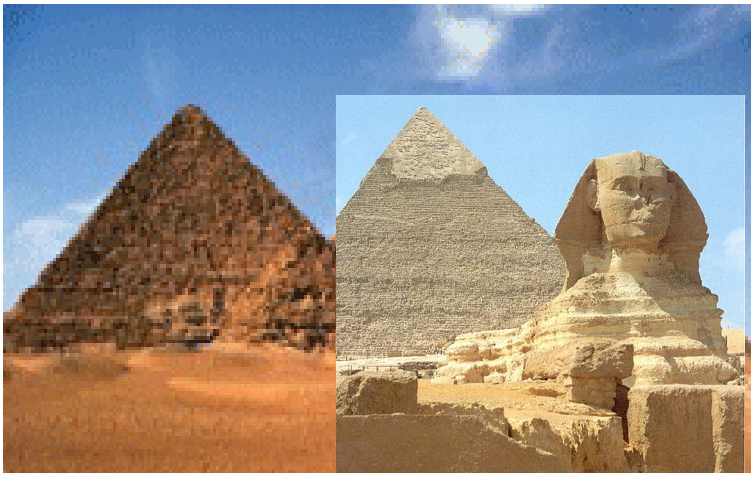


Pilar de hormigón en tracción.

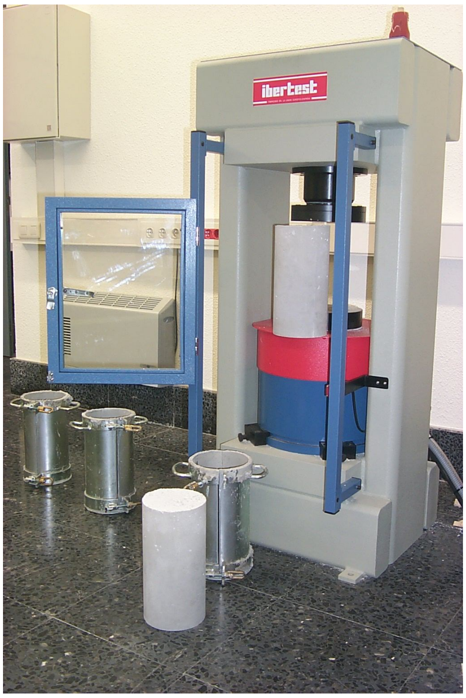
fisuras coincidiendo con los cercos.

Aparcamiento recinto ferial .I.F.E.M.A. (parque Juan Carlos I)

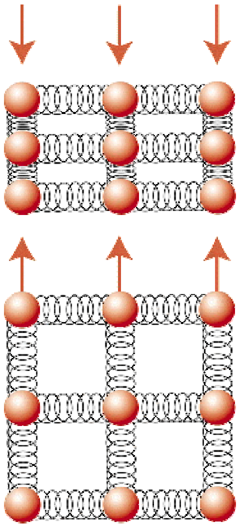
Tensiones de compresión

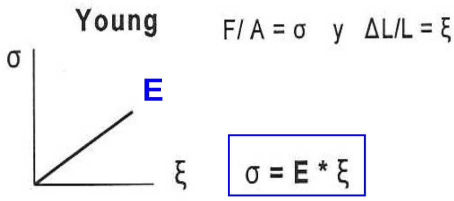


$$\sigma = \frac{F}{A}$$



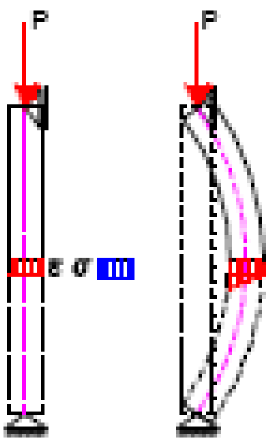
Estructuras no esbeltas: sigue teniendo validez la Ley de Hooke.





Esbeltez "geométrica" = Cociente entre la longitud de una pieza y la menor dimensión de su sección recta. En una probeta de hormigón es la relación entre su altura (30 cm.)y su diámetro (15 cm.)

5.4 Pandeo por compresión.



Para estructuras esbeltas aparece el fenómeno del pandeo.

La probeta de hormigón

Investigando un poco, las cosas no son tan simples:

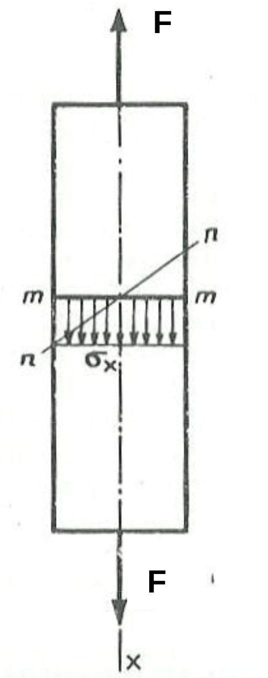
Se somete una probeta a axil puro, en la sección recta sólo tenemos tensión normal:

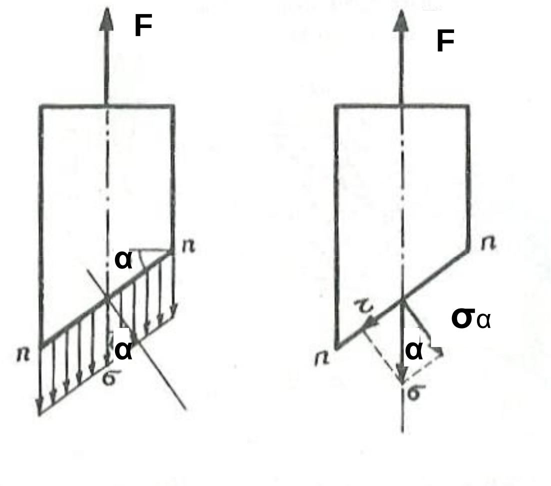
$$\sigma_{medio} = \frac{F}{A}$$

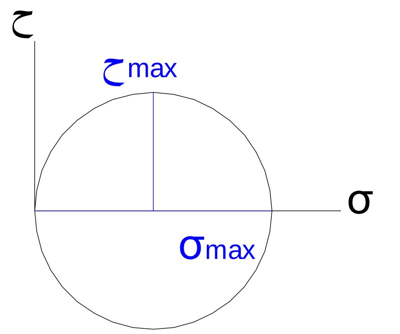
Pero si estudiamos un plano inclinado un ángulo α con la sección recta tendremos tensiones. "$\boldsymbol{\sigma}_\alpha$"y "$\boldsymbol{\tau}_\alpha$".

La sección A_1 es mayor y la tensión normal ahora es menor y de valor: $\sigma = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F}{A} * \cos\alpha$

$$\sigma = \sigma_{medio} * \cos\alpha$$







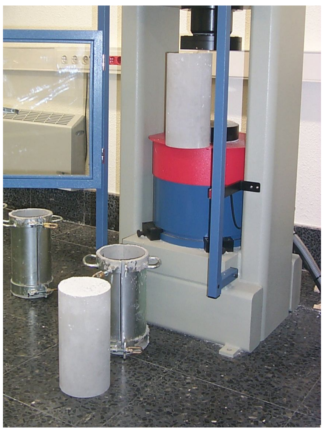
Círculo de Mohr

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma * \cos\alpha = \sigma_{medio} * \cos^2\alpha \\ \tau_\alpha &= \sigma * \sin\alpha = \sigma_{medio} * \sin\alpha * \cos\alpha = \frac{\sigma_{medio}}{2} * \sin 2\alpha \end{aligned}}$$

Estas expresiones indican:

1/ **la tensión normal máxima** se presenta en la sección recta.

2/ **La tensión tangencial máxima** se da cuando sin2α = 1, es decir, para ángulos de 45º.

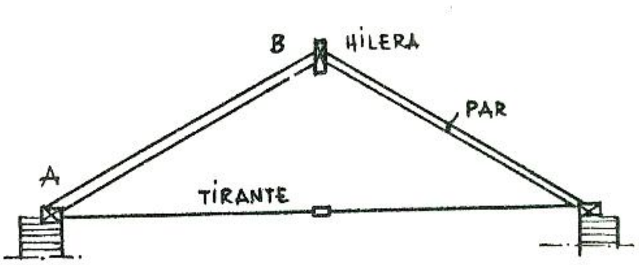


La probeta rompe por tensiones tipo "**τ**" aunque la solicitación sea axil.

Resolución cerchas isostáticas

Estructuras sencillas: I**SOSTÁTICAS**

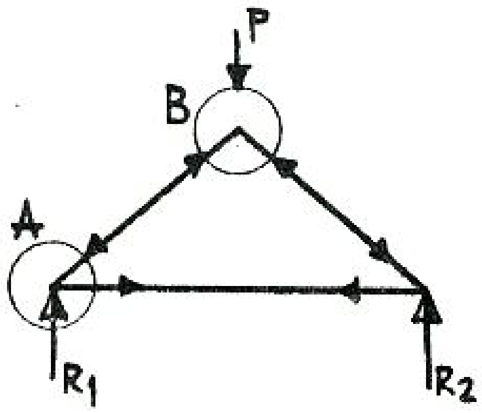
Se resuelven utilizando sólo las ecuaciones de equilibrio:

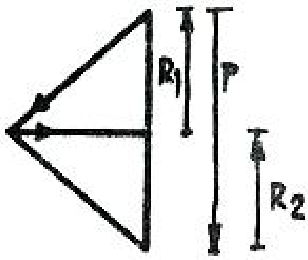


* equilibrio del conjunto → reacciones.

** equilibrio de barra → solicitación axil en barras.

Método analítico y mejor el gráfico.

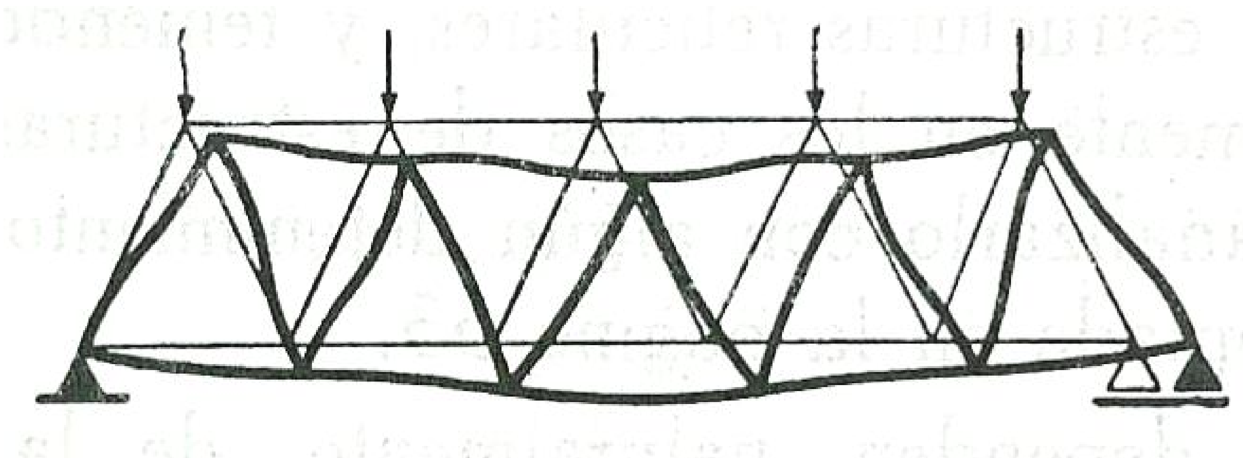




Equilibrio gráfico

La deformación axil. Alargamiento o acortamiento no influye en el valor de la solicitación. Las barras se pueden considerar RÍGIDAS longitudinalmente.

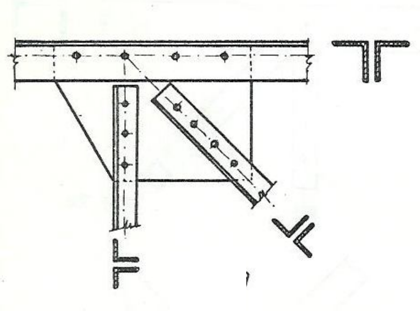
La deformación perpendicular a la directriz no afecta al equilibrio del nudo.

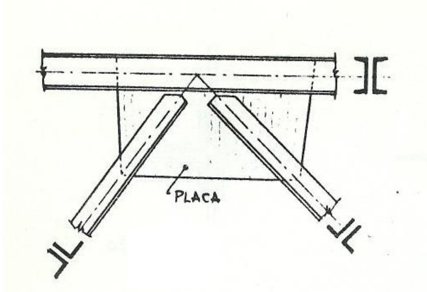


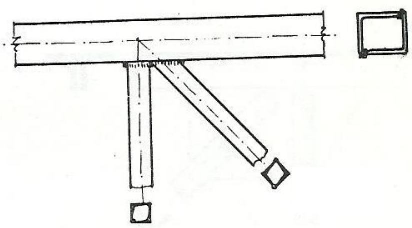
En grandes estructuras hay que tener en cuenta estos movimientos
Antiguamente se utilizaba del diagrama de Williot.
Actualmente se utiliza **el método matricial.**

Nudo articulado

*** **NUDO ARTICULADO**: Se diferencia del nudo rígido en que los extremos de todas las barras que concurren en él giran libremente, se comportan los enlaces como articulaciones perfectas.





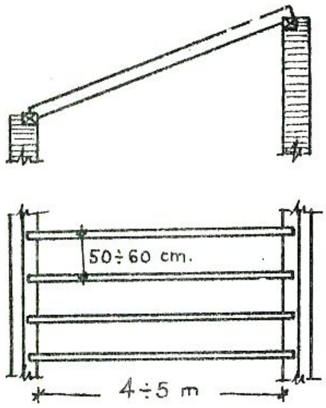


Cercha al la española en el aula museo de construcción (E.U.A.T.M.)

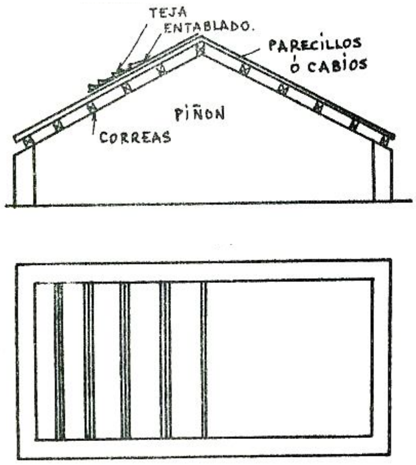
Puente carril bici y paso peatonal elevado de L = 40m en Av. de los Andes (2006)

Evolución cubiertas

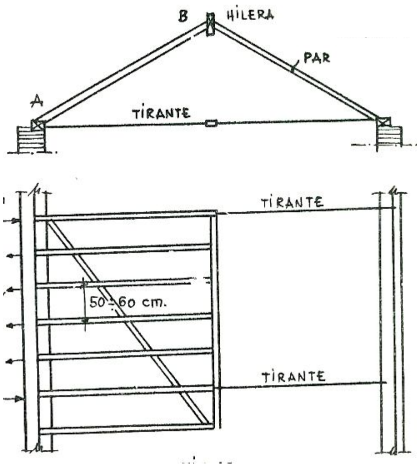
Par y picadero

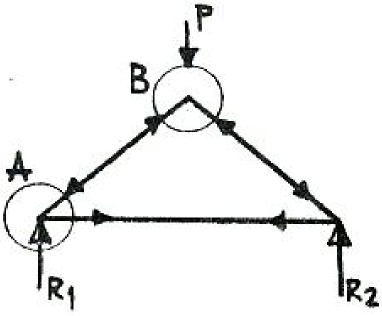


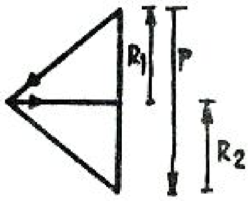
A la molinera



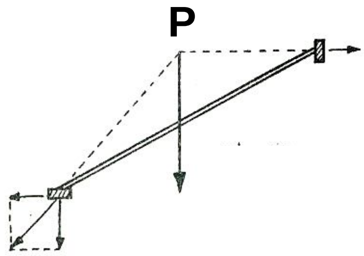
Par e hilera (7 m.)



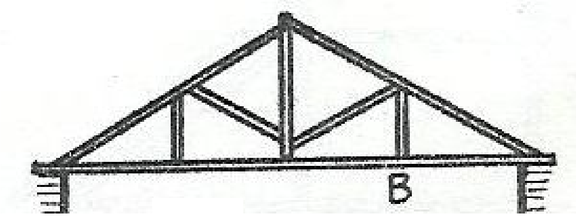




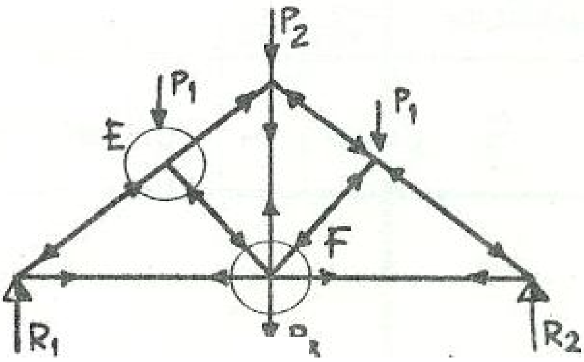
Equilibrio gráfico con tirante

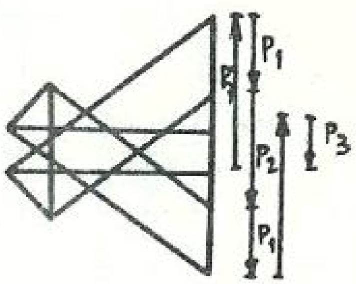


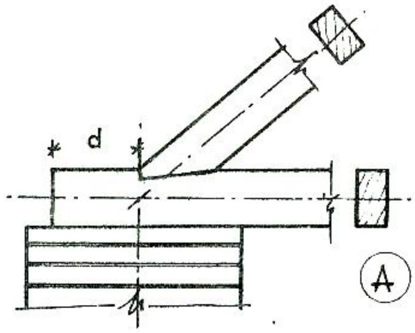
Equilibrio gráfico sin tirante

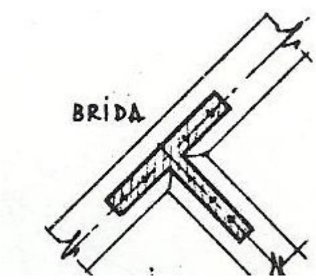


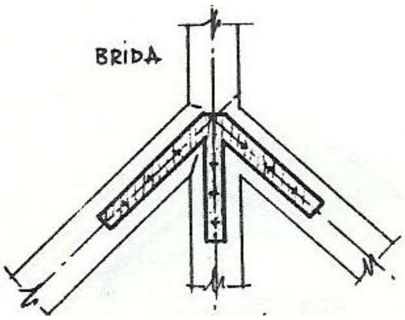
Cubierta a la española (12 m.)

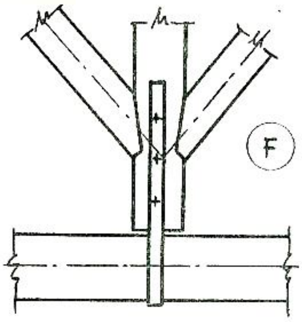


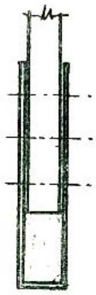




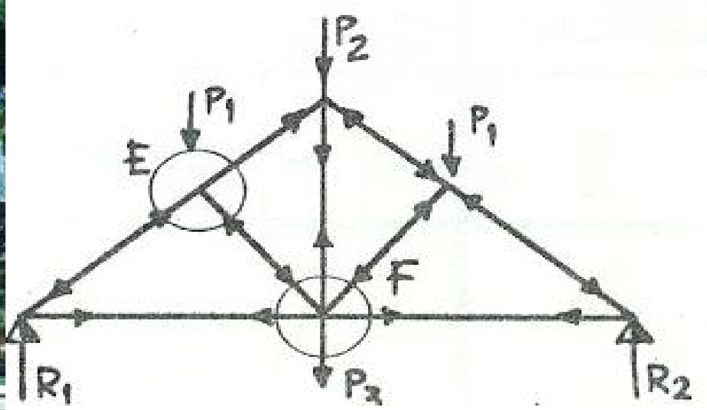


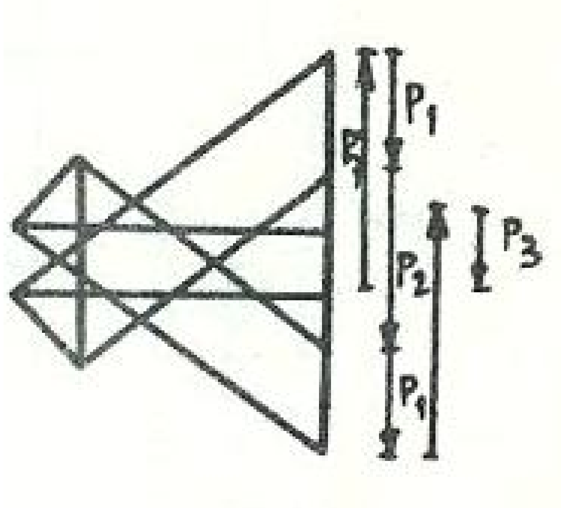


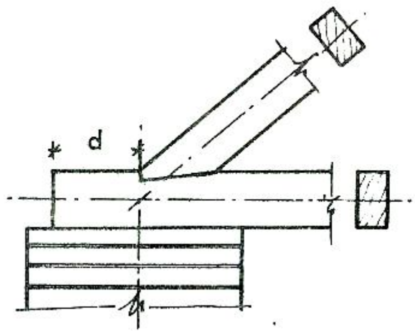


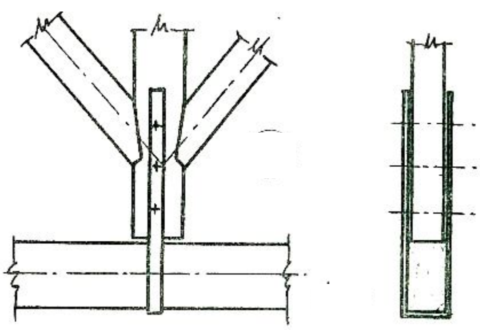


Cercha a la española (hasta unos 12 m.)

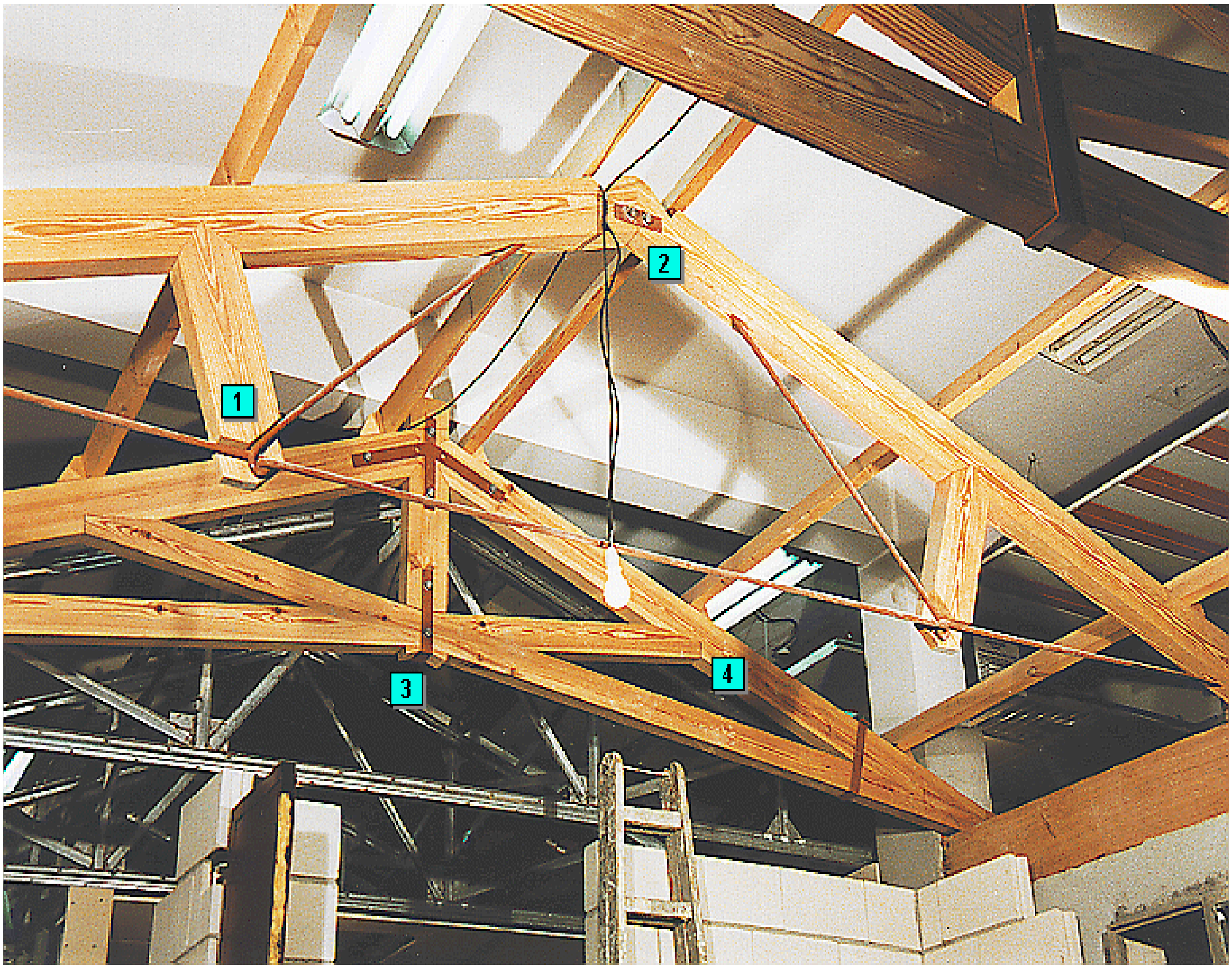


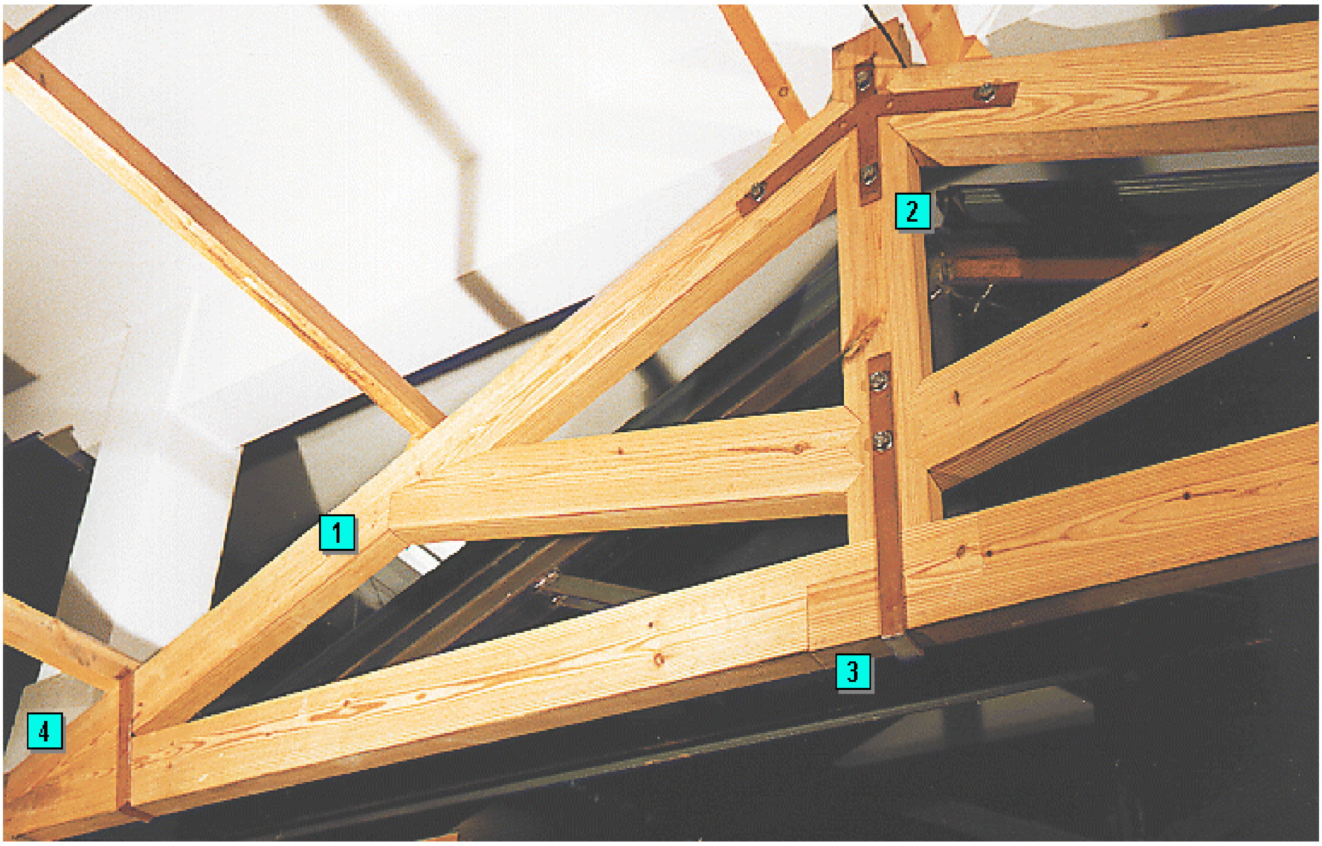




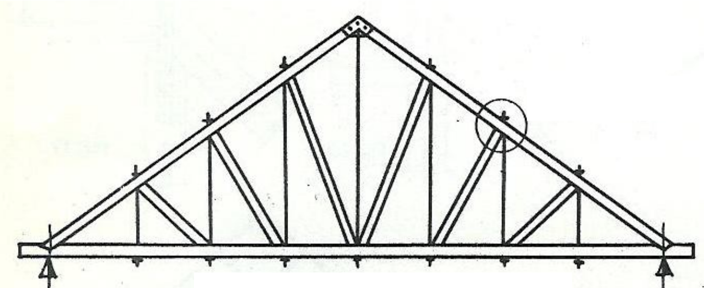


Cerchas madera (fotos aula museo E.U.A.T.M.)

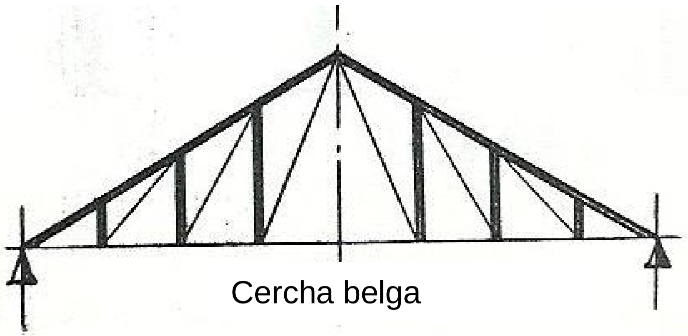




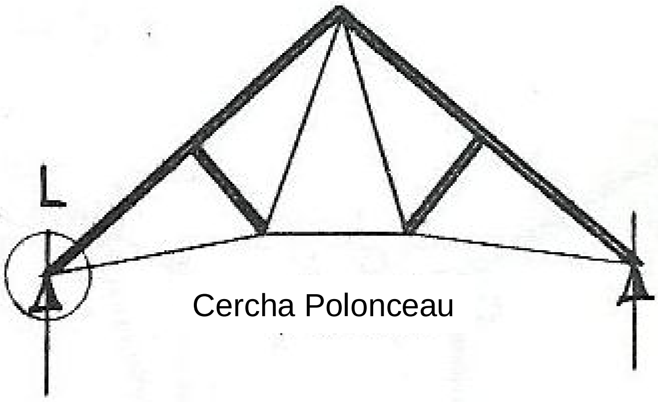
Formas derivadas (hasta unos 30 m.)



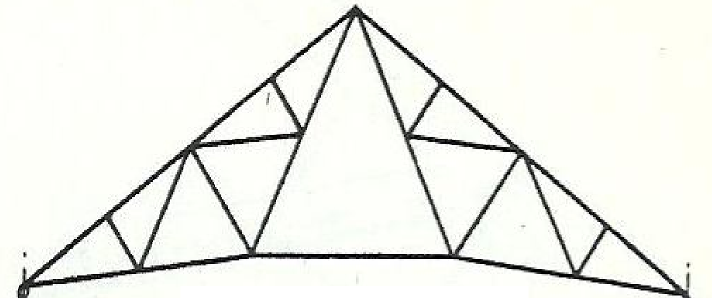
Cercha inglesa



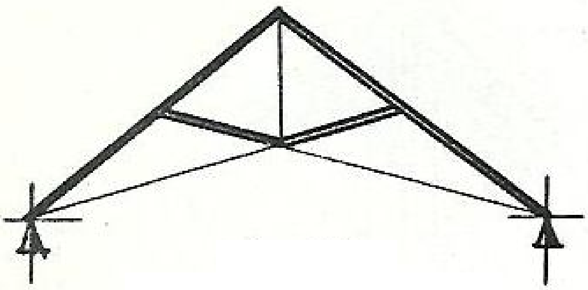
Cercha belga



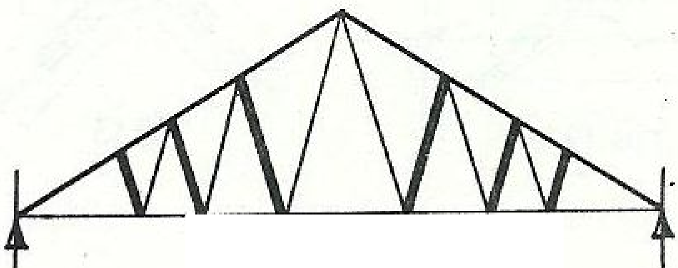
Cercha Polonceau



Cercha Polonceau compuesta

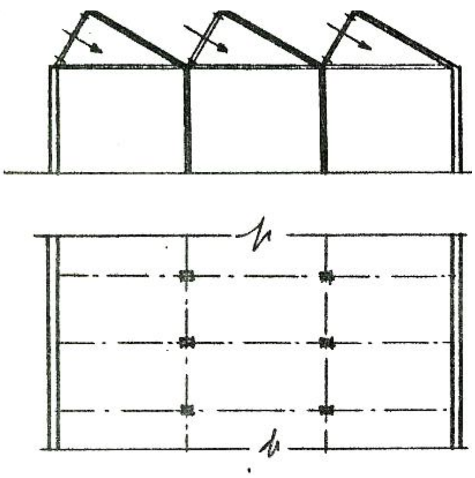


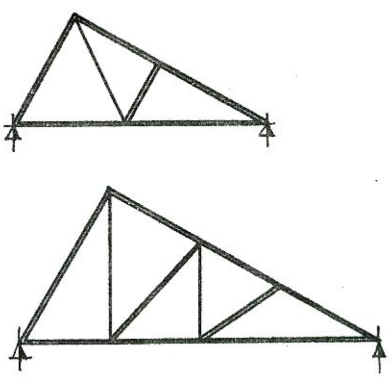
Cercha a la alemana

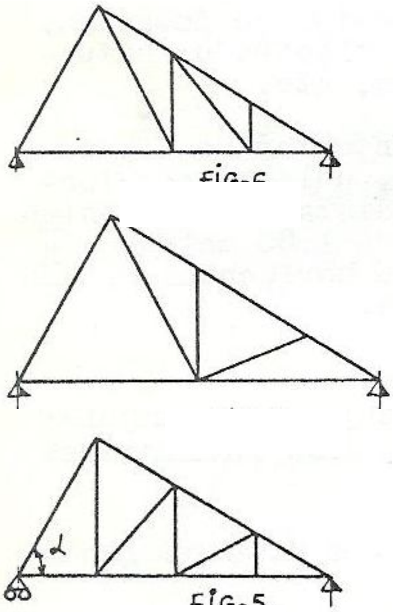


Cercha Swan

Cubiertas en diente de sierra (a la americana)

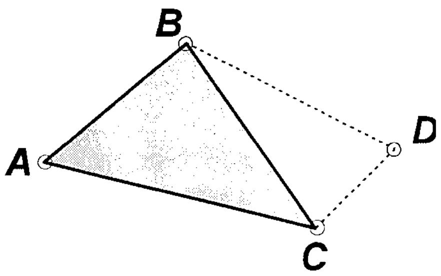






Fijación de un nudo en el plano.

En el plano la figura indeformable es el triángulo. Para fijar un punto en un plano es suficiente con unirlo mediante dos barras (no alineadas) a dos puntos que resulten fijos, en particular, pueden ser dos de los vértices del triángulo inicial.



Los grados de libertad de movimientos de un nudo cualquiera en el plano son dos:

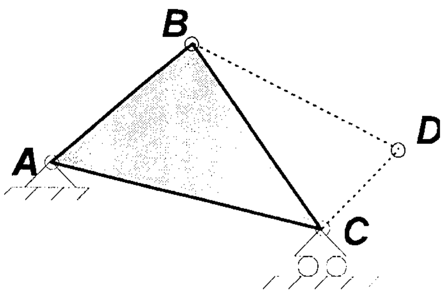
Cada barra que le une o ata a un punto fijo, le anula un grado de libertad.

En consecuencia, se han de poner tantas barras como dos veces el número de nudos.

La figura elemental, representada en la parte superior, está formada por cuatro nudos y cinco barras. Así pues, posee todavía tres grados de libertad.

Relación entre barras y nudos en el plano

Una manera de eliminarlos y convertir la figura en una estructura puede ser, por ejemplo, colocar un apoyo fijo en el nudo A (un apoyo fijo le anula los dos posibles movimientos en el plano y da lugar a la aparición de dos reacciones independientes) y colocar un apoyo móvil en C (un apoyo móvil elimina uno de los dos movimientos posibles del nudo en el plano y da lugar a la aparición de una reacción en el mismo).



Como el número de movimientos restringidos en los nudos de los apoyos coincide siempre con el número de reacciones en los mismos, podremos afirmar que la condición necesaria para que cualquier estructura articulada plana sea isostática, es que verifique la fórmula:

$$\boxed{2 * n - r = b}$$

Condición necesaria pero NO suficiente → puede cumplirse y no ser una estructura

↓

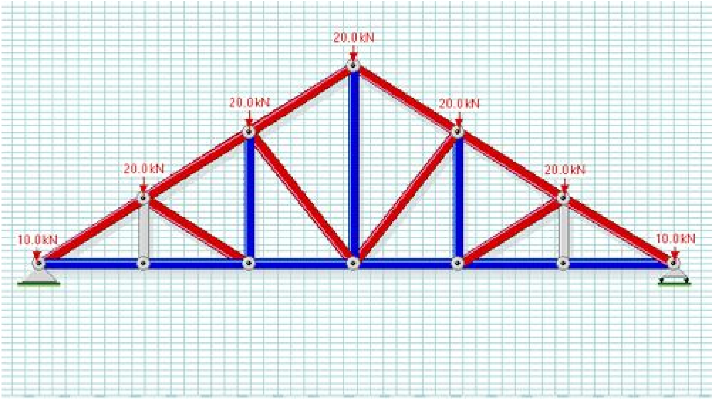
<u>es deformable</u> (el error está en la forma → FORMA CRÍTICA)

Clasificación estructuras articuladas planas I

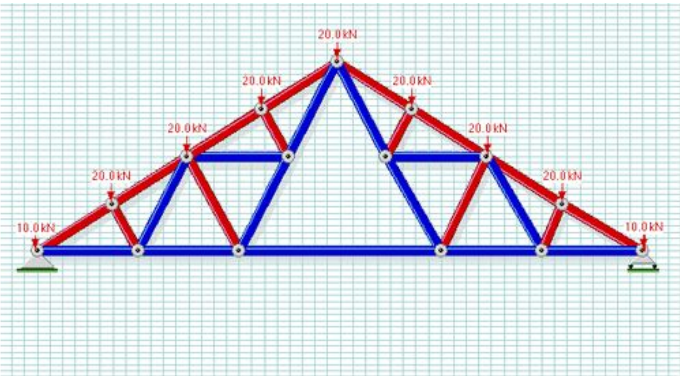
Isostáticas 2n – r = b

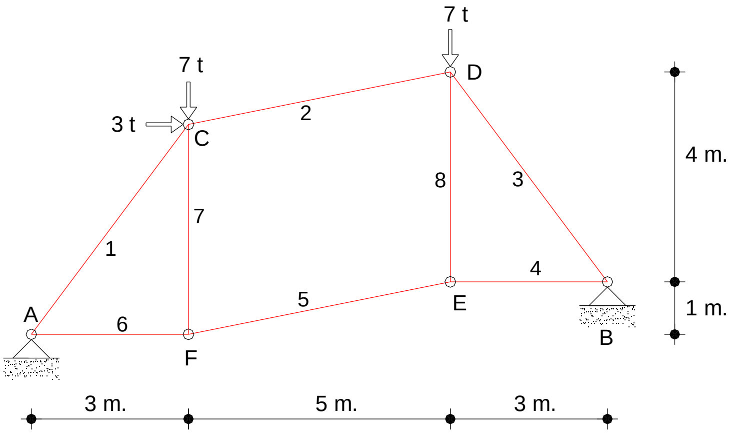
Reticulado I

1º/ Simples: las más sencillas, triangulaciones simples.



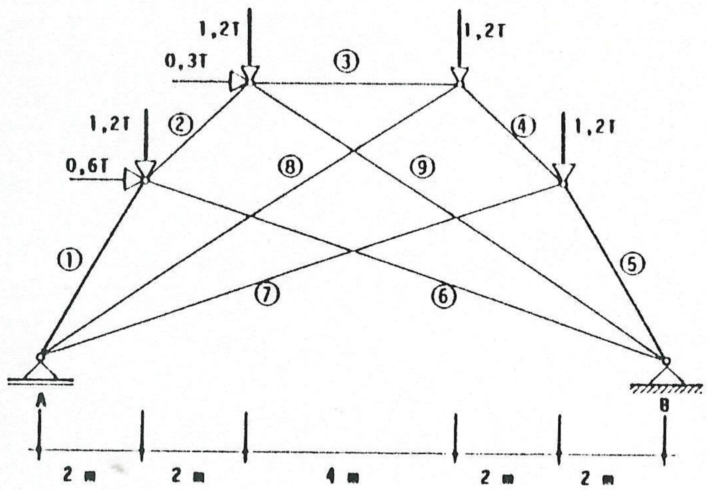
2º/ Compuestas: dos simples unidas por: una articulación y una barra, o tres barras

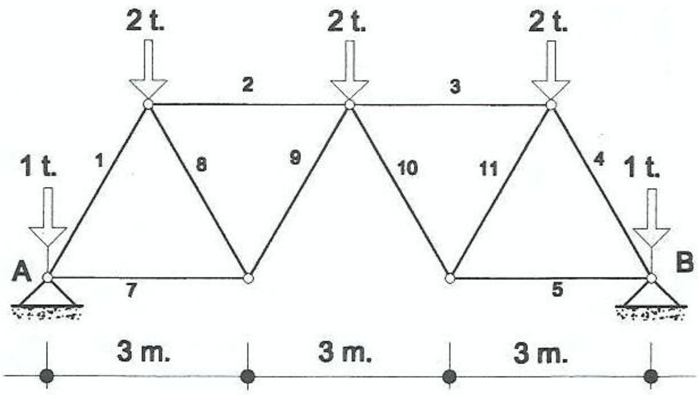




2n – r = b

2(6) - 4 = 8 → OK





2n – r = b

2(7) - 4 = 10 → OK

2n – r = b

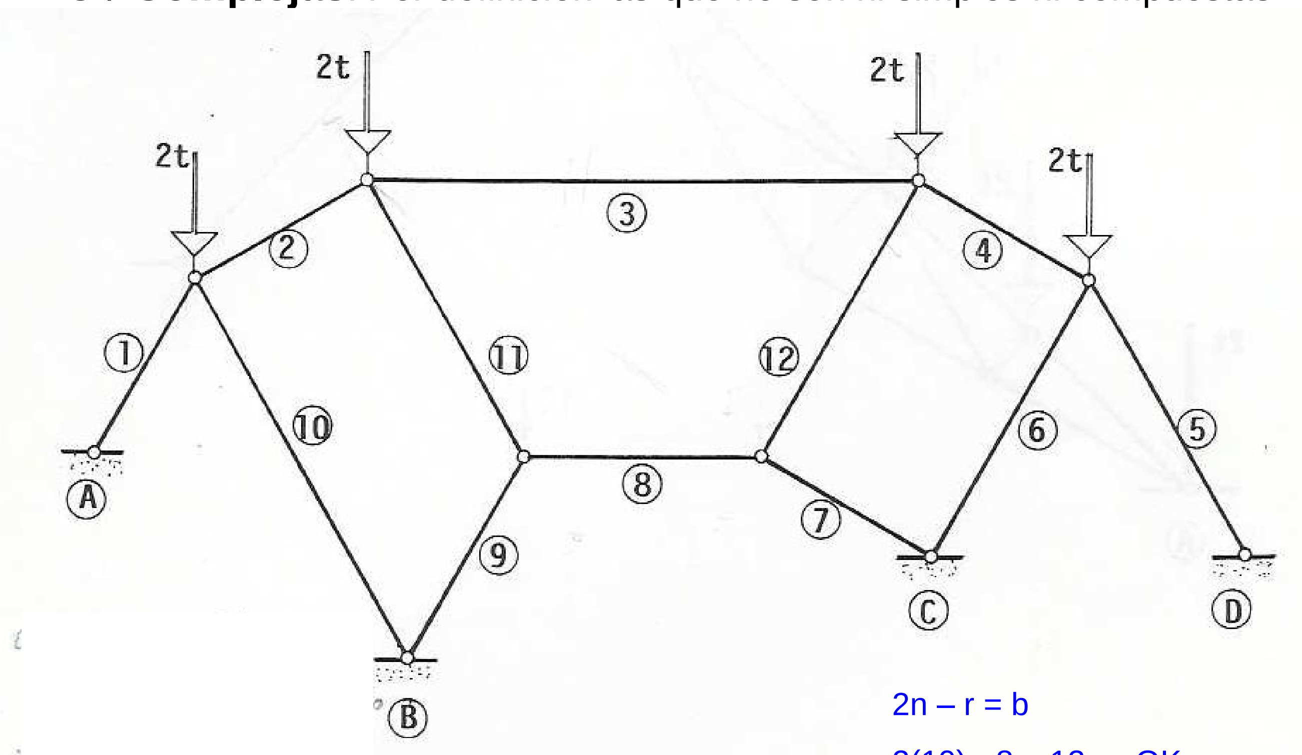
2(6) - 3 = 9 → OK

Clasificación estructuras articuladas planas II

Isostáticas 2n – r = b

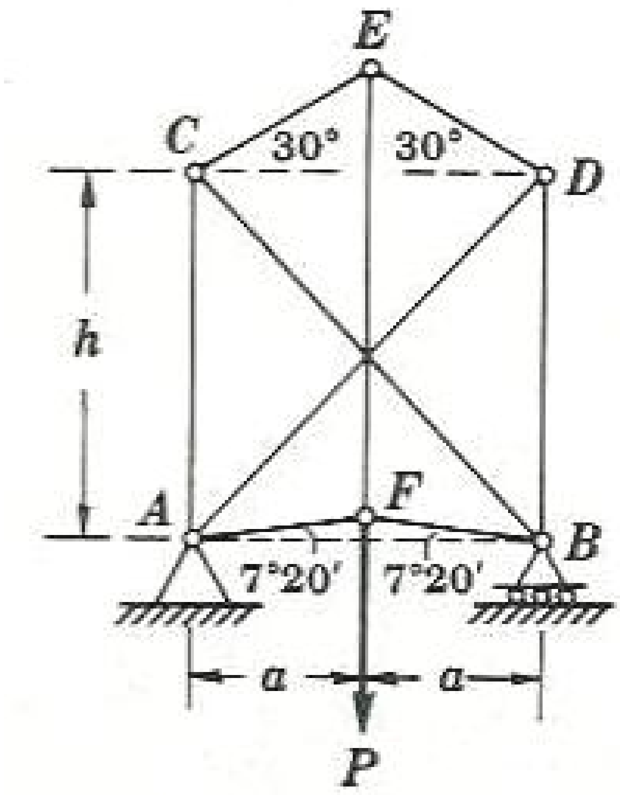
Reticulado I

3º/ **Complejas**: Por definición las que no son ni simples ni compuestas.



2n – r = b

2(10) - 8 = 12 → OK



Normalmente no hay ningún nudo con sólo dos barras por donde poder empezar, el primero en encontrar un método para poder resolverlas fue Henneberg.

Su método también llamado de sustitución de barras, puede aplicarse a la resolución de cualquier estructura isoltática, es por tanto, un método general.

2n – r = b

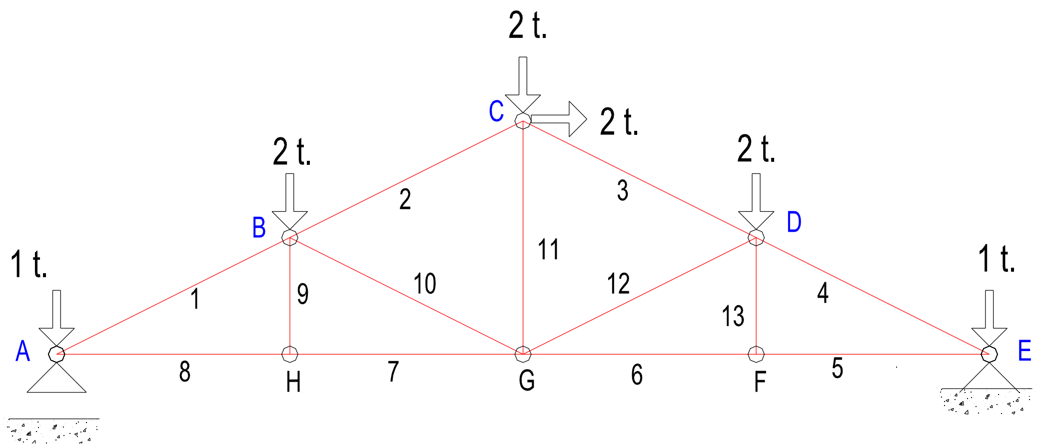
2(6) - 3 = 9 → OK

Clasificación estructuras articuladas planas II

Isostáticas 2n – r = b

Reticulado II

1º/ **Reticulado completo**: La triangulación de barras está completa.



2n – r = b

2 (8) - **3** = 13 → OK

Reticulado simple y completo.

ISOSTÁTICA

2º/ Reticulado incompleto: En determinados casos se pueden sustituir algunas barras de triangulación por un número equivalente de reacciones. El nº de reacciones ha de ser > 3.

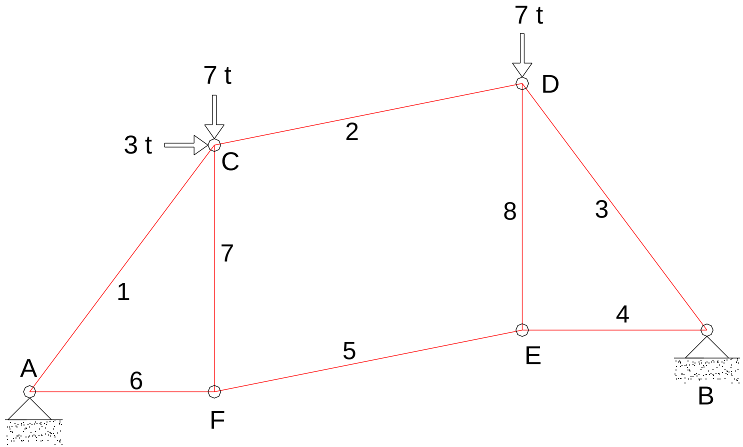
2n – r = b

2(6) - 4 = 8 → OK

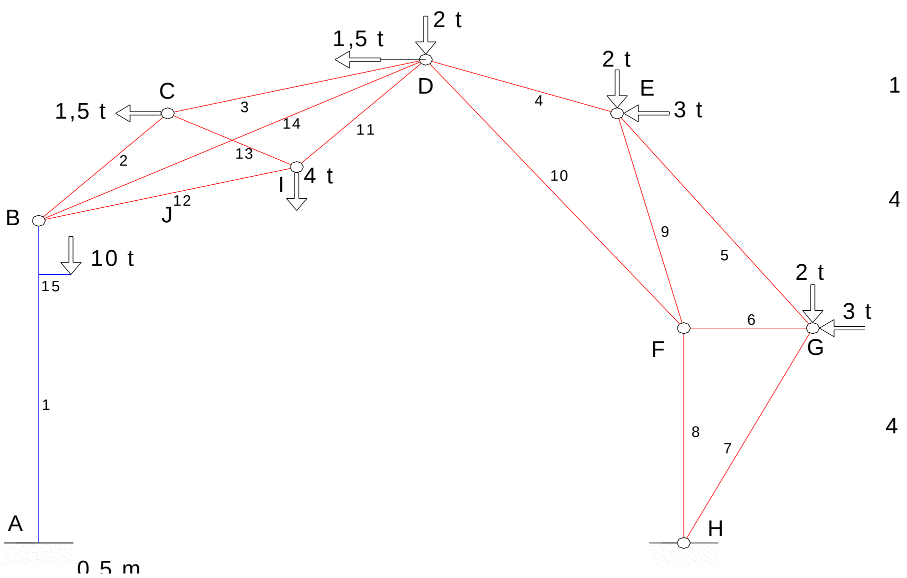
Reticulado incompleto.

(Base fija).

ISOSTÄTICA



3º/ Reticulado abundante: Hay más barras de las estrictamente necesarias.



2n –r < b

2(8) -4 =12 **<13** → hiper

Reticulado abundante.

Base fija

Clasificación estructuras articuladas planas III

Sustentación

1º/ Isostática:

El número de reacciones coincide con el de ecuaciones de equilibrio: **3** en el plano en general o 6 en el espacio. (LA ÚNICA EXCEPCIÒN ES EL ARCO DE TRES ARTICULACIONES)

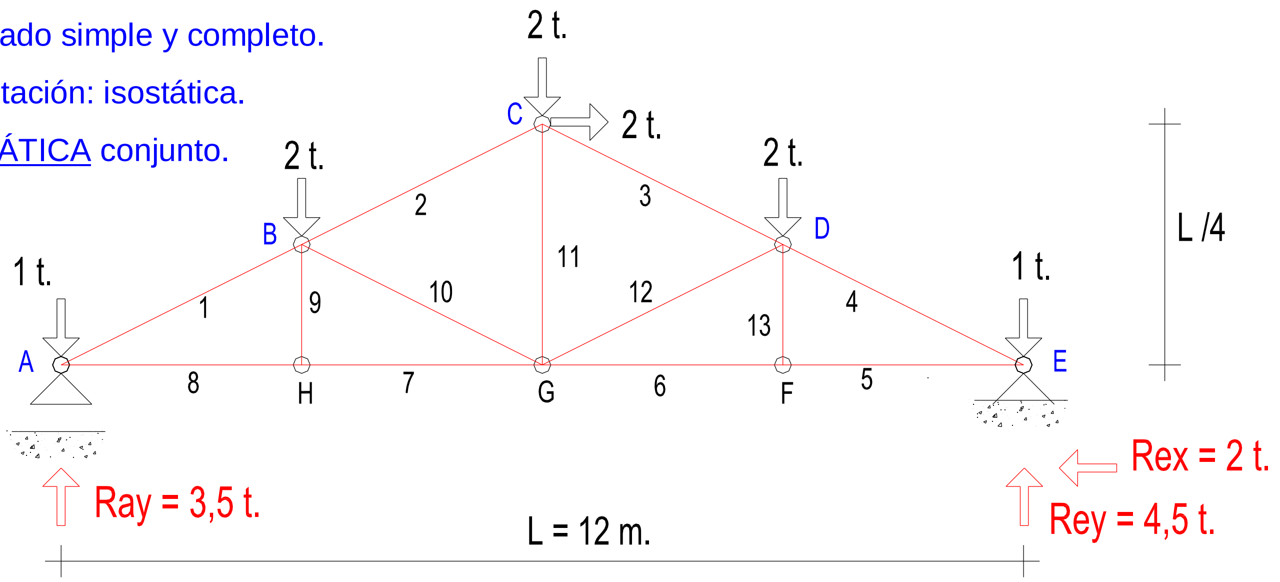
$2n - r = b$

$2(8) - 3 = 13 \rightarrow$ OK

Reticulado simple y completo.

Sustentación: isostática.

ISOSTÁTICA conjunto.



2º/ Base fija:

El número de reacciones es superior a **3** en el plano o 6 en el espacio.

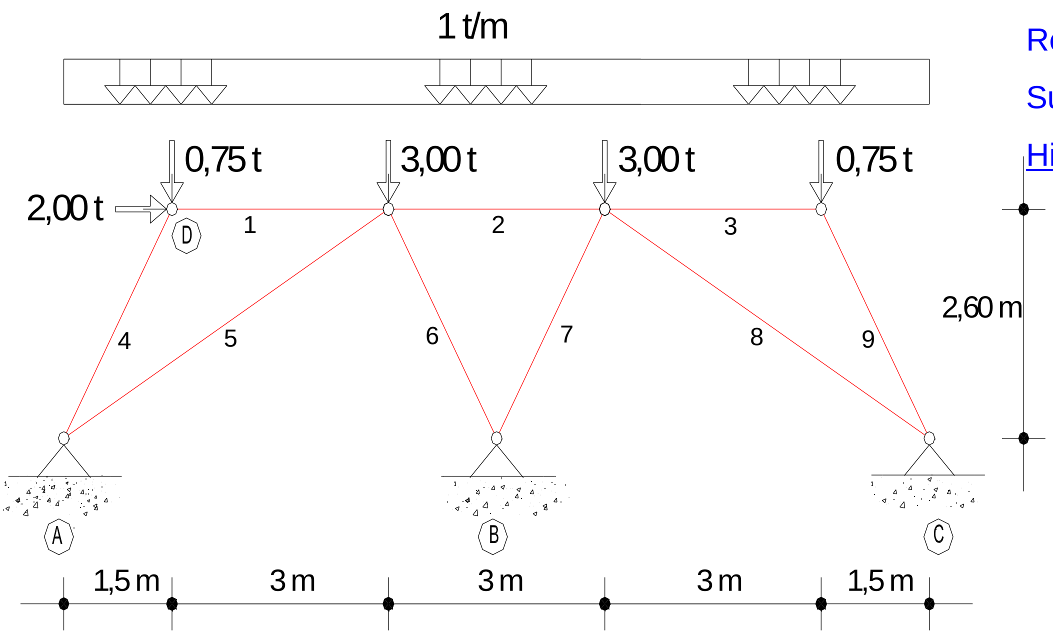
$2n - r = b$

$2(7) - 6 = 8 < b = 9$

Reticulado completo.

Sustentación: base fija

Hiperestática conjunto.

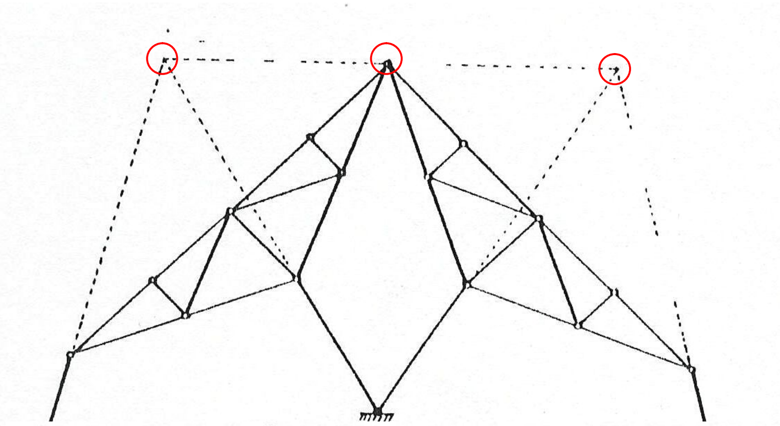


Ejemplos formas planas CRÍTICAS

Isostáticas 2n – r = b

¡Condición necesaria pero NO suficiente!.

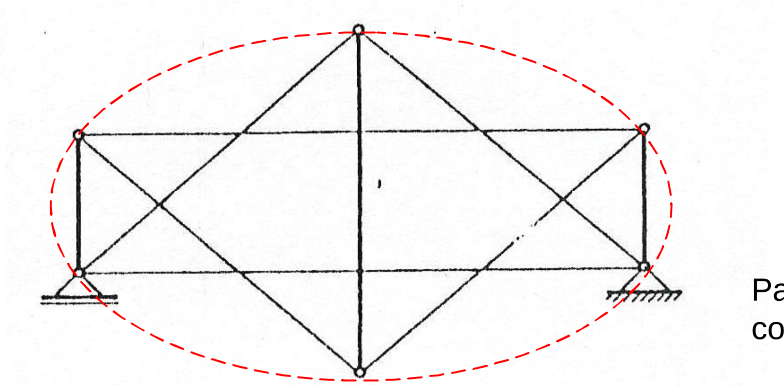
CRÍTICAS: Cumplen la fórmula, pero no pueden trabajar sin sufrir una deformación primero. No son verdaderas estructuras. Al analizarlas, nos encontramos que para que exista equilibrio alguna de las barras, o alguna de las reacciones → ∞



2n – r = b

2(18) - 6 = 30 → no OK

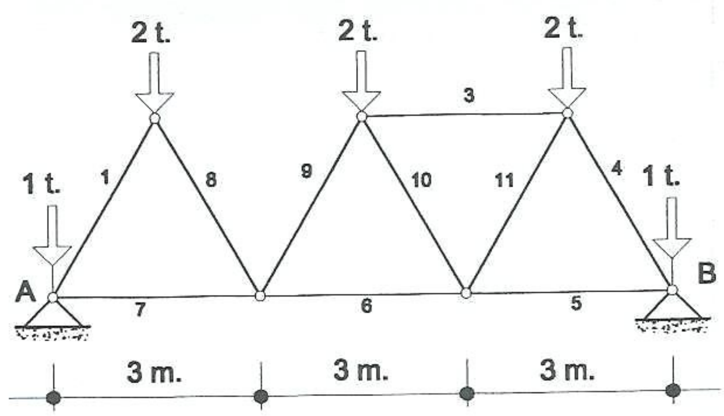
Equivale a dos bielas alineadas.



2n – r = b

2(6) - 3 = 9 → no OK

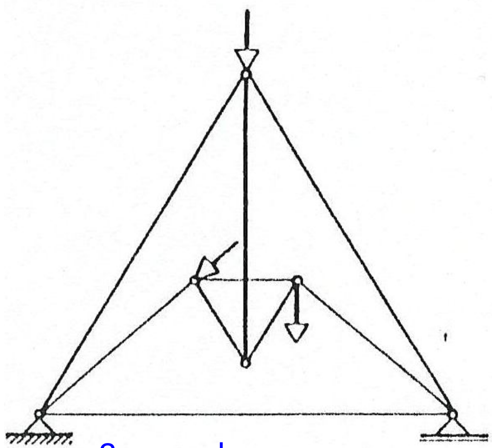
Pascal demostró que una estructura reticulada con 6 nudos en una cónica, es crítica.



2n – r = b

2(7) - 4 = 10 → no OK

En este caso la falta de una barra no se puede compensar con una reacción mas.



2n – r = b

2(6) - 3 = 9 → no OK

2 reticulados simples unidos por tres bielas concurrentes.

Estructuras articuladas hiperestáticas e hipostáticas

En caso de no verificarse la fórmula → **2n- r = b** → hay dos posibilidades

***Estructuras hiperestáticas:**

$$\boxed{2n - r < b}$$

Hay exceso de barras → hiperestática interna.

Hay exceso de reacciones → hiperestática externa.

Simultáneamente hay exceso de barras y apoyos → hiperestática interna y externa.

Estructuras HIPERESTÁTICAS: **son necesarias:**

Ecuaciones de equilibrio.

Ecuaciones de comportamiento del material.

Ecuaciones de compatibilidad deformaciones.

*No se pueden utilizar estas simplificaciones
Una biela es equivalente a un apoyo móvil.
Dos bielas concurrentes y que no estén en prolongación equivalen a un apoyo fijo.

** Si el G.H. = 1 → método de los trabajos virtuales o método matricial.

*** Si el G. H. >1 → método matricial.

****Estructuras hipostáticas:**

$$\boxed{2n - r > b}$$

Faltan barras → hipostática interna.
Faltan reacciones → hipostática externa.
Faltan barras y apoyos → hipostática interna y externa.

NO es una estructura válida para edificación, es un mecanismo → No se puede calcular. **Su estudio, en cambio, es útil en relación con las estructuras de nudos rígidos para saber el grado de traslacionalidad.**

Estructuras Articuladas Hiperestáticas

De la estructura de acero croquizada, de peso propio despreciable, se pide:

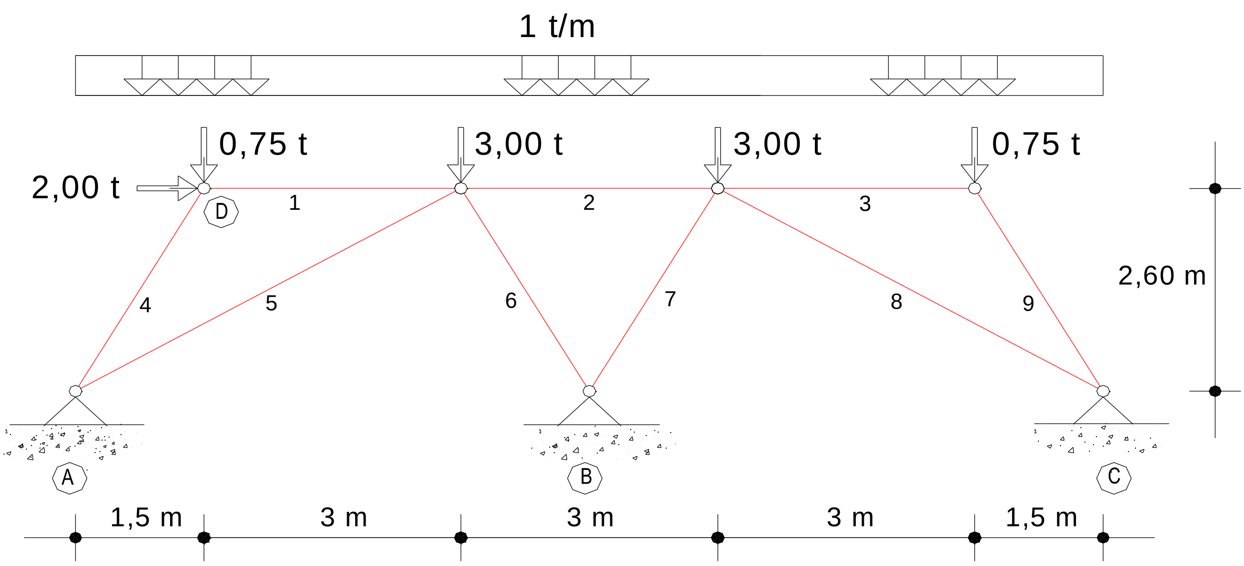
1/ Analizarla y clasificarla.

2/ Obtener las reacciones (componentes horizontal y vertical).

3/ Obtener las solicitaciones en todas las barras y dibujar a escala los de las barras: 1y 4.

4/ Calcular el desplazamiento horizontal del nudo D (indicando módulo en mm. y sentido).

Nota: todas las barras A=18 cm^2 $E = 2 * 10^6$ kp /cm^2 (200 GPa)   1t <>10 kN



Final diciembre 2008

2n –r = b

2(7) -6 = 8 **< 9** → hiperestática

Grado hiperestático: 13 -12 =1

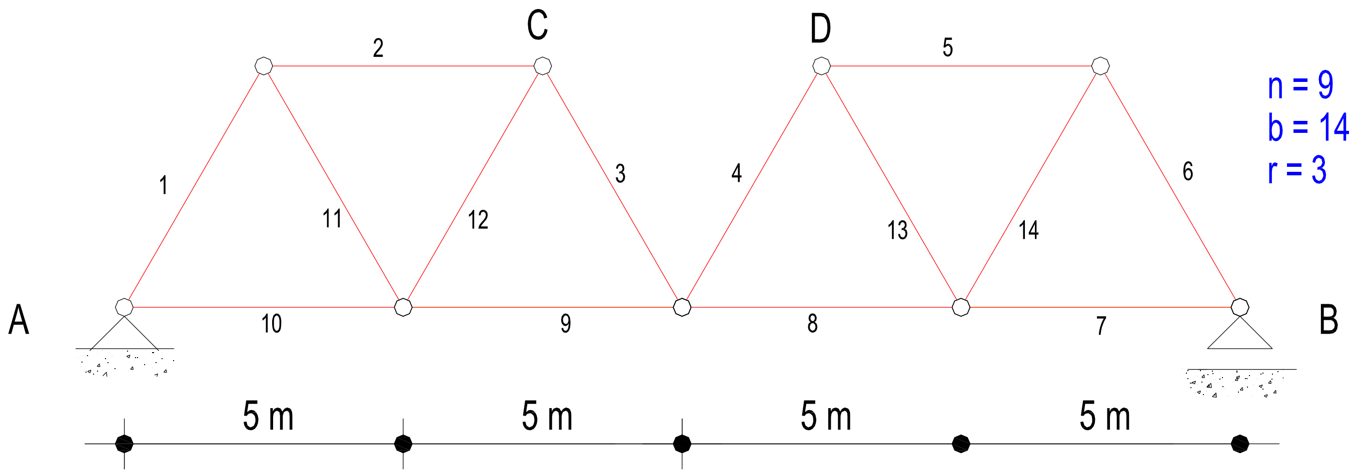
Reticulado completo, base fija.

*No se pueden utilizar estas simplificaciones

Una biela es equivalente a un apoyo móvil.
Dos bielas concurrentes y que no estén en prolongación equivalen a un apoyo fijo.

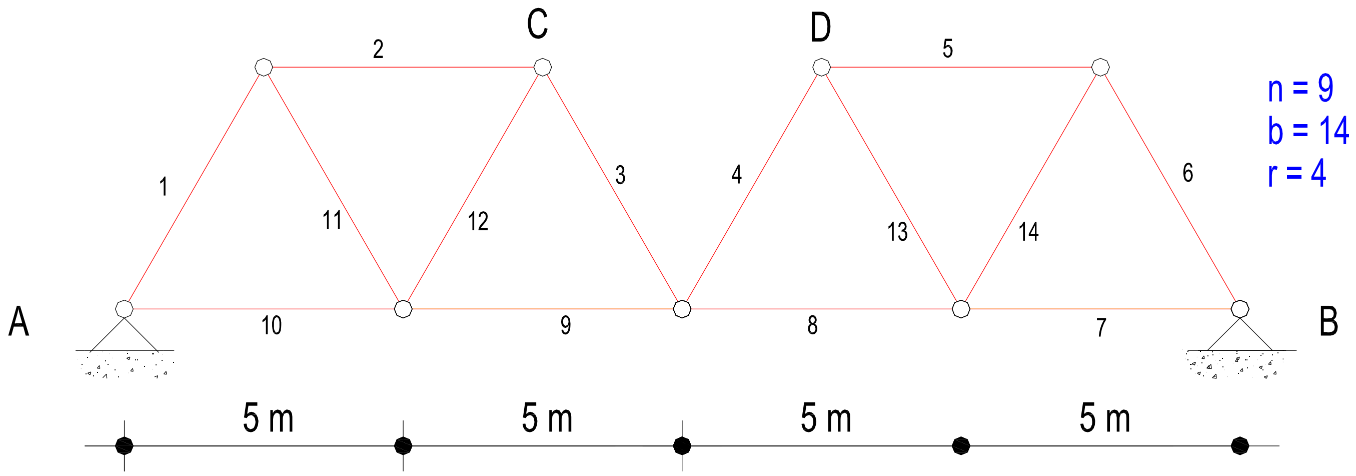
** Si el G.H. = 1 → método de los trabajos virtuales o método matricial.
*** Si el G. H. >1 → método matricial.

Mecanismos



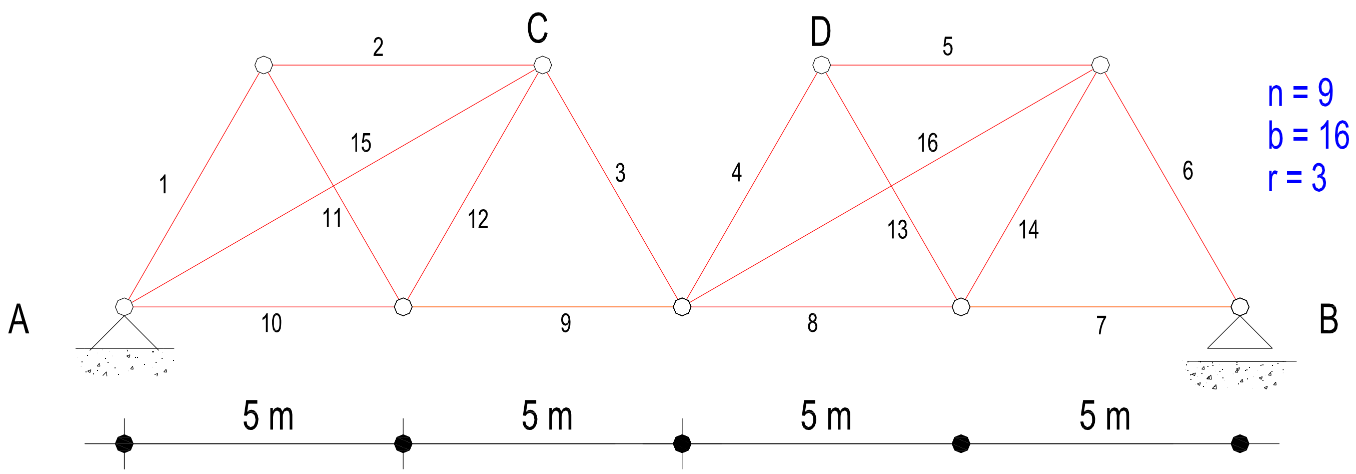
$\boxed{2n - r = b}$ $\quad 2*(9) - 3 = 15 < b \Rightarrow$ Es hipostática de grado 1, falta una barra: C - D

Fallo fórmula entre nudos, barras y reacciones



$\boxed{2n - r = b}$ $\quad 2*(9) - 4 = 14 = b \Rightarrow$ Aparentemente isostática, pero

Es hipostática de grado 1, falta una barra C - D



$\boxed{2n - r = b}$ $\quad 2*(9) - 3 =14 < b \Rightarrow$ Aparentemente hiperestática, pero

Es hipostática de grado 1, falta una barra C - D

El peligro de algunos errores en el diseño

Uno de los errores que deben evitar cometer incluso ingenieros con experiencia es pasar por alto la labor previa de identificar y contar nudos rígidos, nudos articulados, barras y reacciones en una presunta estructura articulada. Este debe ser un paso previo a su análisis y cálculo.

FUNDAMENTOS FÍSICOS

EXAMEN FINAL 18/06/2008
(PRIMER PARCIAL)

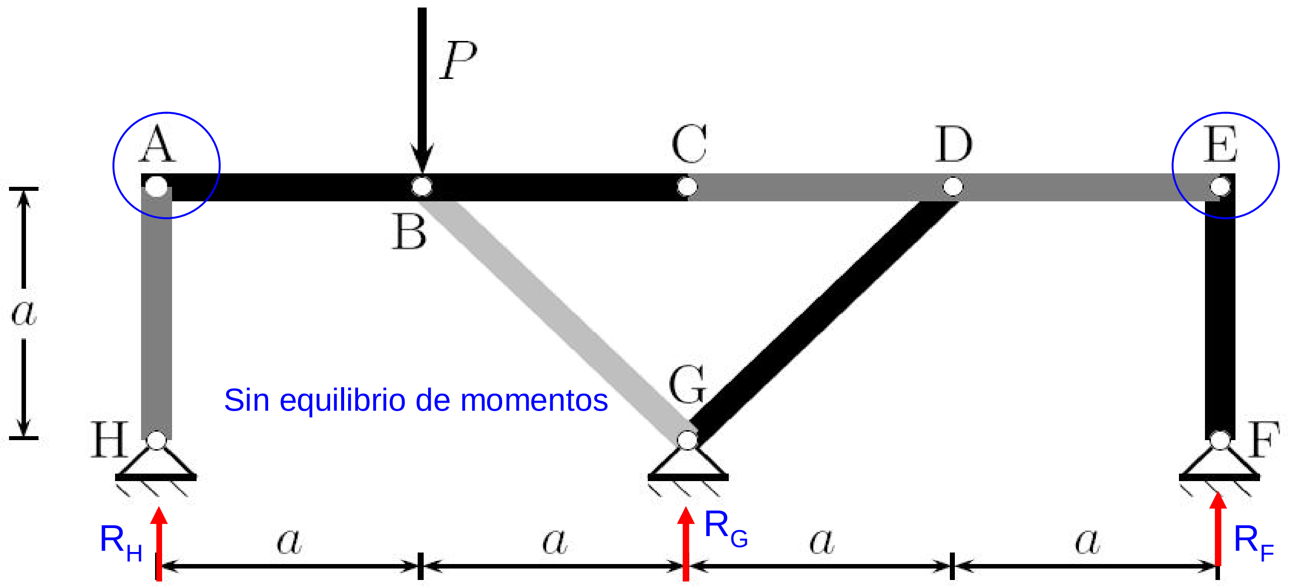
Apellidos y nombre ....

PROBLEMA 1

La estructura de la figura consta de 6 piezas rectas rígidas (AC, CE, EF, GB, GD y HA) unidas mediante pasadores sin rozamiento. Calcule las reacciones en H, G y F.

Las barras AH y EF son bielas descargadas, por tanto, sólo pueden tener trabajo axil..

Idea feliz → En el apoyo fijo G la reacción horizontal es nula al no existir fuerzas exteriores horizontales.

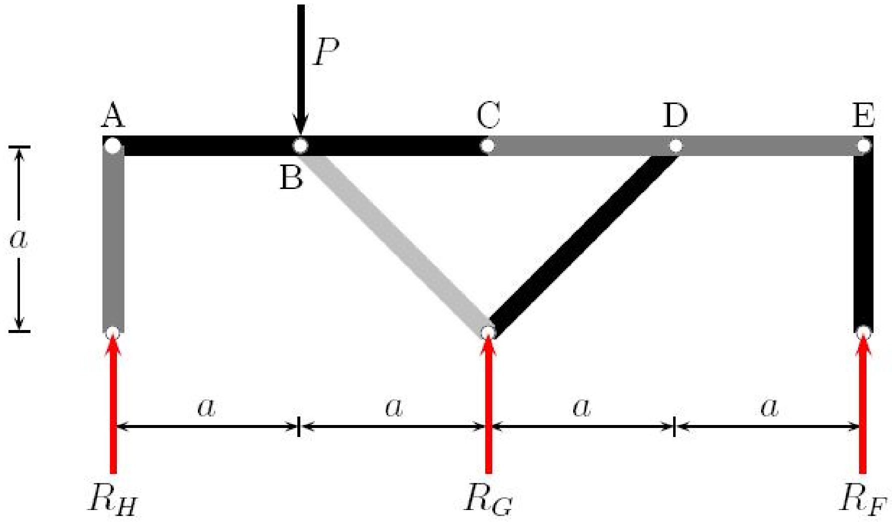


El problema magistralmente propuesto por el profesor de la asignatura D. Enrique Tremps Guerra proporciona en el enunciado un dato que pasa fácilmente desapercibido (también para mí):

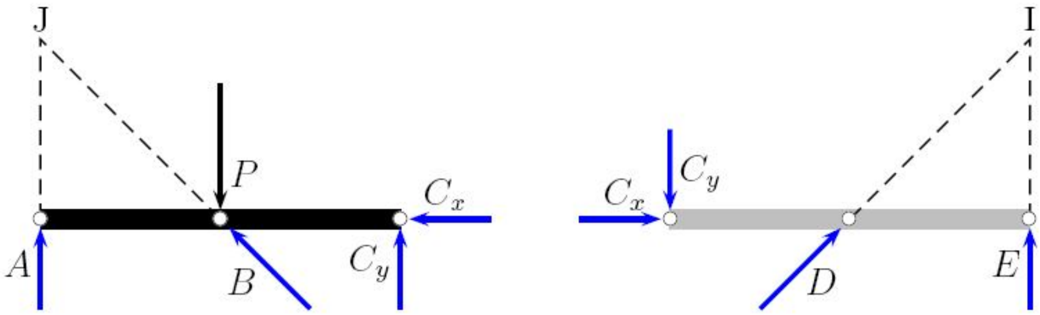
Hay sólo seis piezas ya que $\overline{ABC}$ es una sola barra al igual que la barra CDE. (es decir B es un nudo rígido para la barra AC al igual que D para la barra CE).

PROBLEMA 1 (Parcial 1)

En la siguiente figura de ha dibujado el D.C.L. de la estructura. Obsérvese que las barras AH, BG, DG y EF trabajan a tracción o compresión, lo que implica que las reacciones en H y F han de ser verticales. Además, la reacción en G también es vertical; ya que no puede haber componente horizontal, al ser P también vertical.



Aislemos las barras AC y CE



Toman momentos respecto a J en la barra AC, se tiene

$$M_J = P \cdot a + C_x \cdot a - C_y \cdot 2a = 0$$

Simplificando

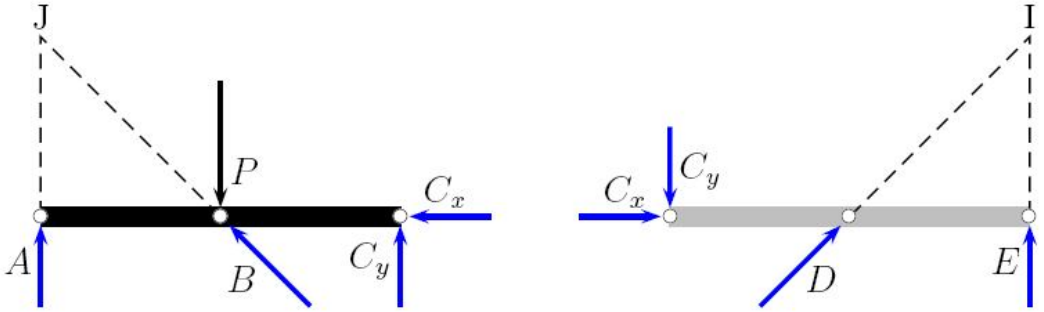
$$-C_x + 2C_y = P$$

Tomando momentos respecto a I en la barra CE,

$$M_I = -C_x \cdot a - C_y \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = -2C_y$$

Sustituyendo obtenemos:

[Equilibrio de las dos partes]



$$M_J = P \cdot a - 2Cy \cdot a - C_y \cdot 2a = 0$$

$$C_y = \frac{P}{4} \;;\; C_x = -\frac{P}{2}$$

Tomando momentos respecto a D en CE:

$$M_D = -C_y \cdot a - E \cdot a = 0$$

Despejando,

$$E = -C_y = -\frac{P}{4}$$

y R_F se obtiene de forma inmediata:

$$R_F = E = -\frac{P}{4}$$

Volviendo al D.C.L. y tomando momentos respecto a H:

$$M_H = P \cdot a - R_G \cdot 2a - R_F \cdot 4a = 0$$

Despejando,

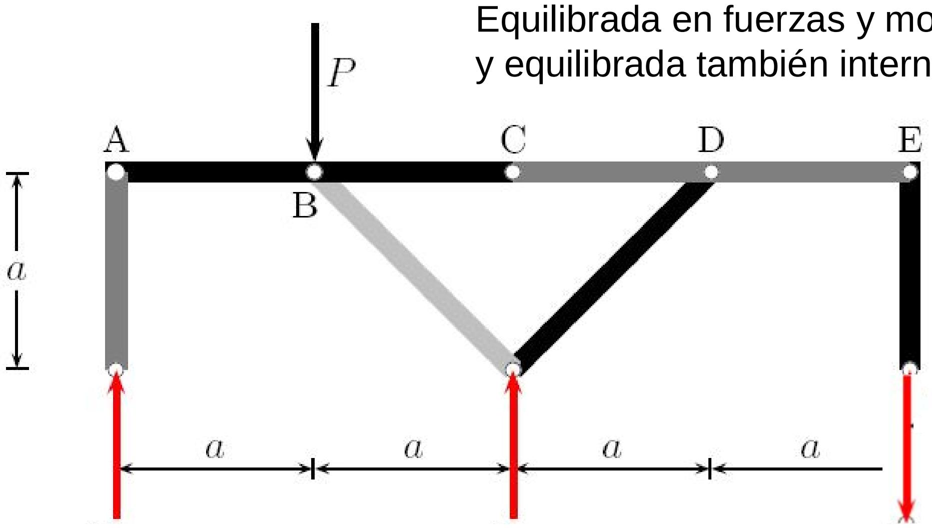
$$R_G = \frac{1}{2}(P - 4R_F) = \frac{1}{2}(P + 4\frac{P}{4}) = P$$

Con lo que R_H vale

$$R_H = \frac{P}{4}$$

Solución propuesta y correcta

Equilibrada en fuerzas y momentos externamente
y equilibrada también internamente.



$R_H = P/4$ $R_G = P$ $R_E = - P/4$

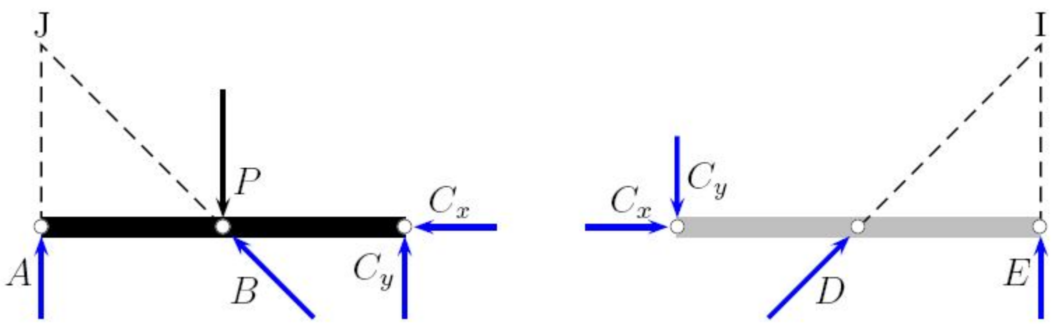
Propuesta errónea:

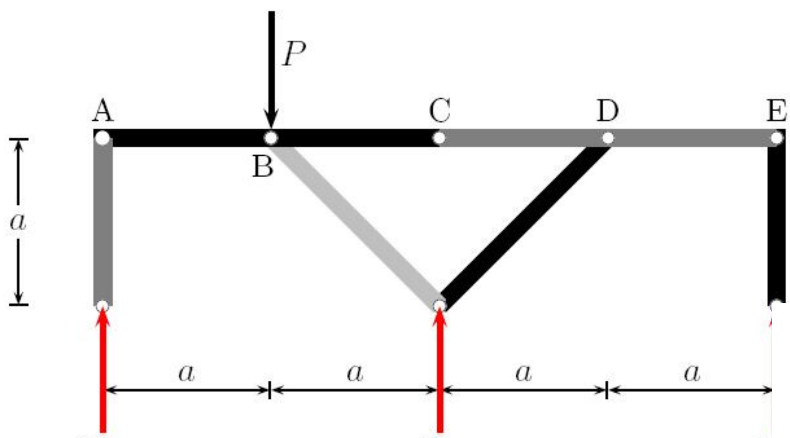
Al observar la figura anterior puede creerse erróneamente que los nudos B y D son articulaciones perfectas con lo que tendríamos ocho barras en lugar de seis y la estructura habría perdido su ser pasando a convertirse en un mecanismo.

Zona izquierda: Como C-B es ahora también una biela ⇒ $C_y = 0$ y $C_x = -P$

Zona derecha: $R_E = 0$ y entonces por simetría $R_H = R_G = P/2$

Equilibrada en fuerzas y momentos.





$R_H = P/2$ $R_G = P/2$ $R_E = 0$

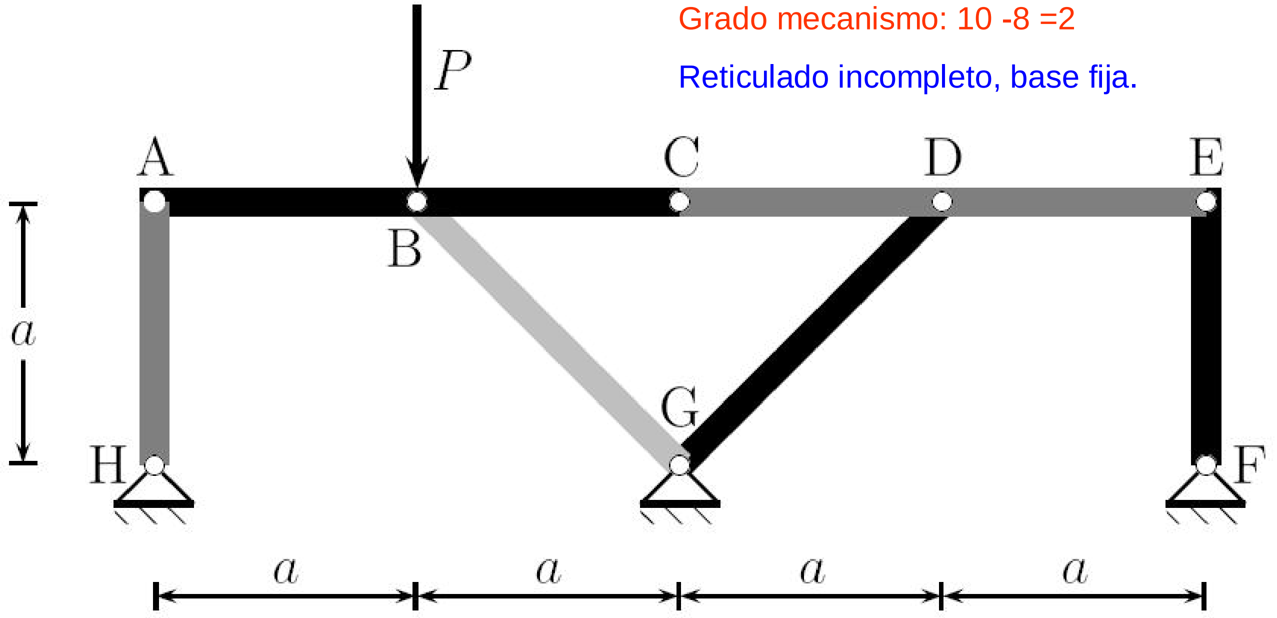
Desde el punto de vista estructural con articulación en B y D.

2n –r = b

2(8) -6 = 10 > **8** → mecanismo

Grado mecanismo: 10 -8 =2

Reticulado incompleto, base fija.



Se intenta arreglar con dos bielas (en rojo)

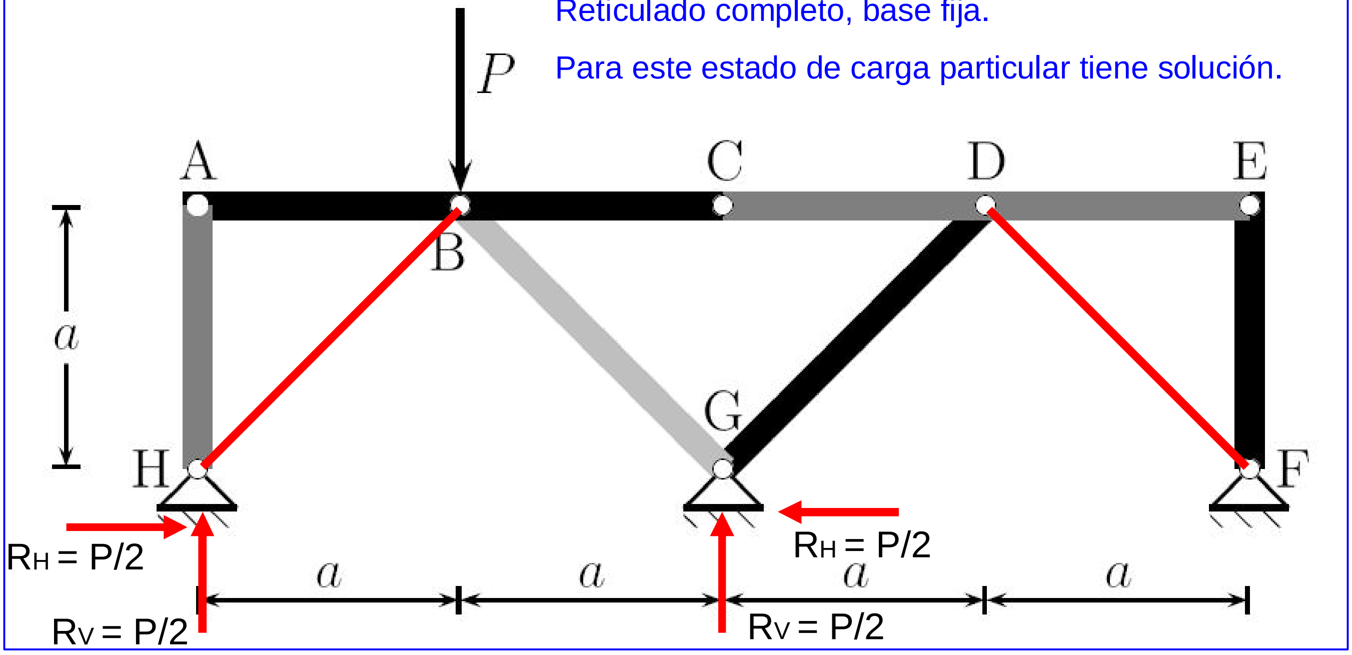
2n –r = b

2(8) -6 = 10 = b

Pero es CRÍTICA por el error de diseño en B – C — D

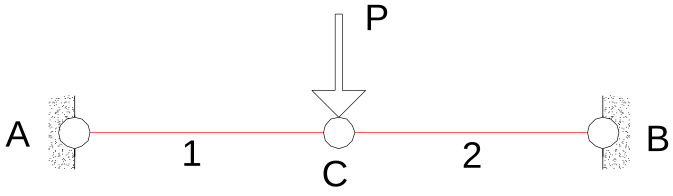
Reticulado completo, base fija.

Para este estado de carga particular tiene solución.



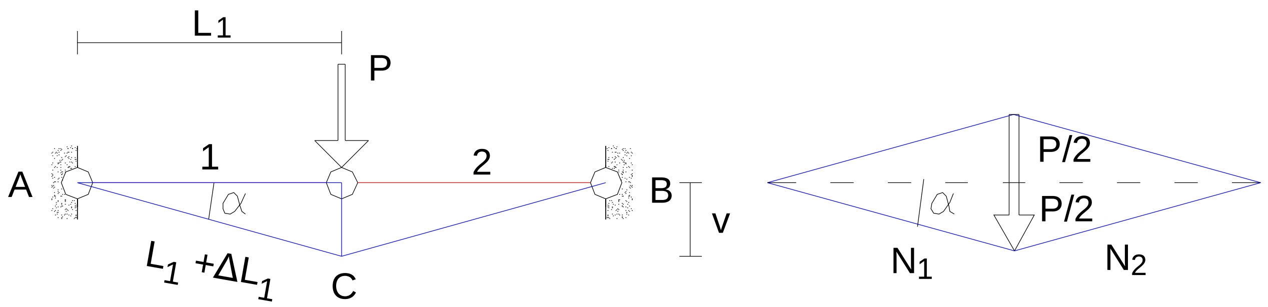
Tiene arreglo cuando C no esté unido a B y D con dos bielas en prolongación

Solución en teoría de 2º orden.



No se puede descomponer P en las direcciones A - C y B - C

No tiene solución en teoría de primer orden



Si tiene solución estudiando la estructua deformada.

Si tiene solución en teoría de segundo orden.

Geometría en la estructura deformada: $(L_1 + \Delta L_1)^2 = L_1^{\,2} + v^2$, $L_1^{\,2} + 2L_1 * \Delta L_1 + \Delta L_1^{\,2} = L_1^{\,2} + v^2$

Despreciando el término: $\Delta L_1^{\,2} \quad \rightarrow \quad \Delta L_1 = \dfrac{v^2}{2L_1}$

Equilibrio de fuerzas en el plano: $\dfrac{P}{2} = N_1 * \sin\alpha$, con "α" muy pequeño, $\dfrac{P}{2} = N_1 * \alpha = N_1 * \dfrac{v}{L_1}$

Imponiendo la ley de Hooke: $\xi_1 = \dfrac{\Delta L_1}{L_1} = \dfrac{N_1}{E * A}$

Sustituyendo la 2ª ecuación en la cuarta: $\dfrac{v^2}{2L_1 * L_1} = \dfrac{N_1}{E * A} \quad \rightarrow N_1 = \dfrac{v^2 * EA}{2L_1^{\,2}}$

Donde se tiene N_1 en función de la deformación " v " si este puede medirse con precisión.

Sustituyendo en la 3ª ecuación: $P = \dfrac{v^3 * EA}{L_1^{\,3}}$ y $v = L * \sqrt[3]{P/EA}$

Eliminando "v" en la 3º ecuación, la relación entre P y N_1 es: $\dfrac{P}{2} = N_1 * \dfrac{L * \sqrt[3]{P/EA}}{L}$

Finalmente entonces: $$\boxed{N_1 = \frac{P}{2} * \sqrt[3]{\frac{E * A}{P}}}$$

Compleja y crítica a la vez

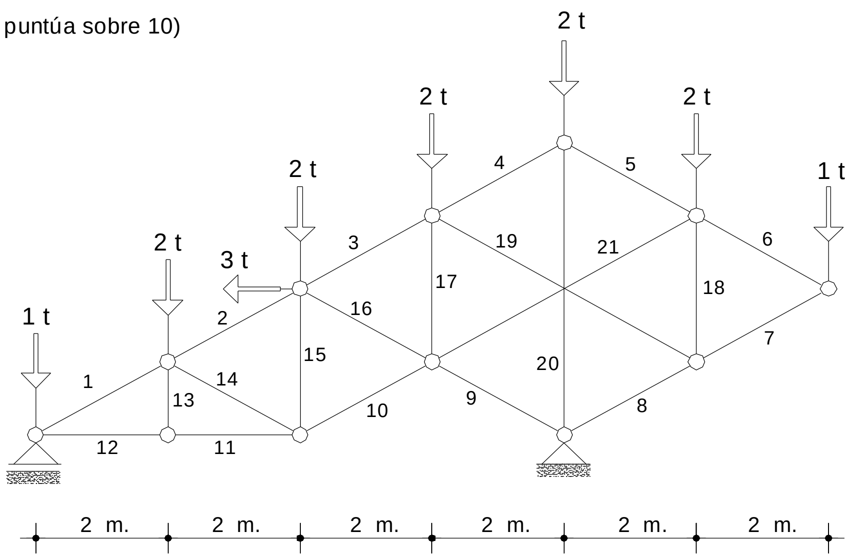
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TÉCNICA
Dpto. "TECNOLOGÍA DE LA EDIFICACIÓN"
(223) ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN II
Examen extraordinario 12/12/2002

Apellidos: Nombre: D.N.I.:

Obtener analítica y gráficamente las reacciones.

Obtener las solicitaciones de las barras.

(Este ejercicio puntúa sobre 10)



Final diciembre 2002

n= 12 b = 21 r= 3

2n –r = b

2(12) - 3 =21 → OK

Reticulado completo

Forma compleja

Sustentación isostática

Aparentemente isostática conjunto.

FORMA CRÍTICA

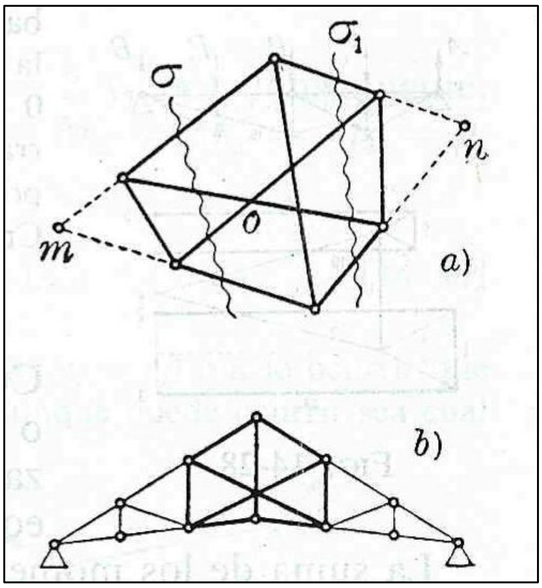
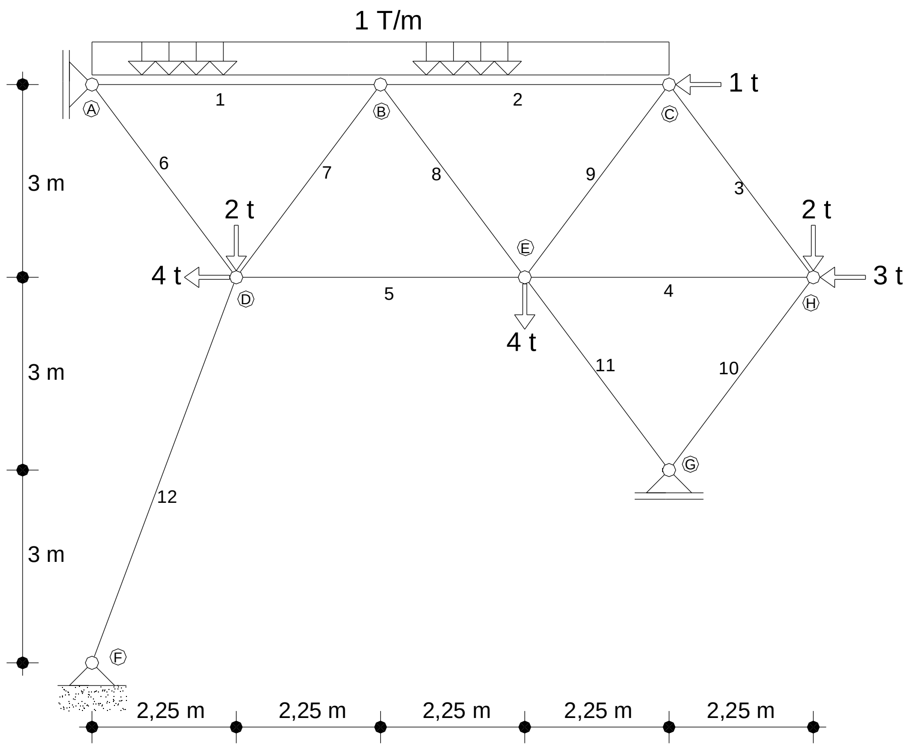


Imagen del tomo I "Ciencia de la Construcción de Belluzzi.

En una estructura hexagonal no se impide un pequeño movimiento relativo de los diversos nudos cundo los puntos "m", "n" y "o" están alineados. Esto sucede por el teorema de Pascal, cuando los seis nudos están sobre una cónica.

Ejemplos I estructuras articuladas isostáticas



Final diciembre 2005

n= 8 b = 12 r= 4

2n –r = b

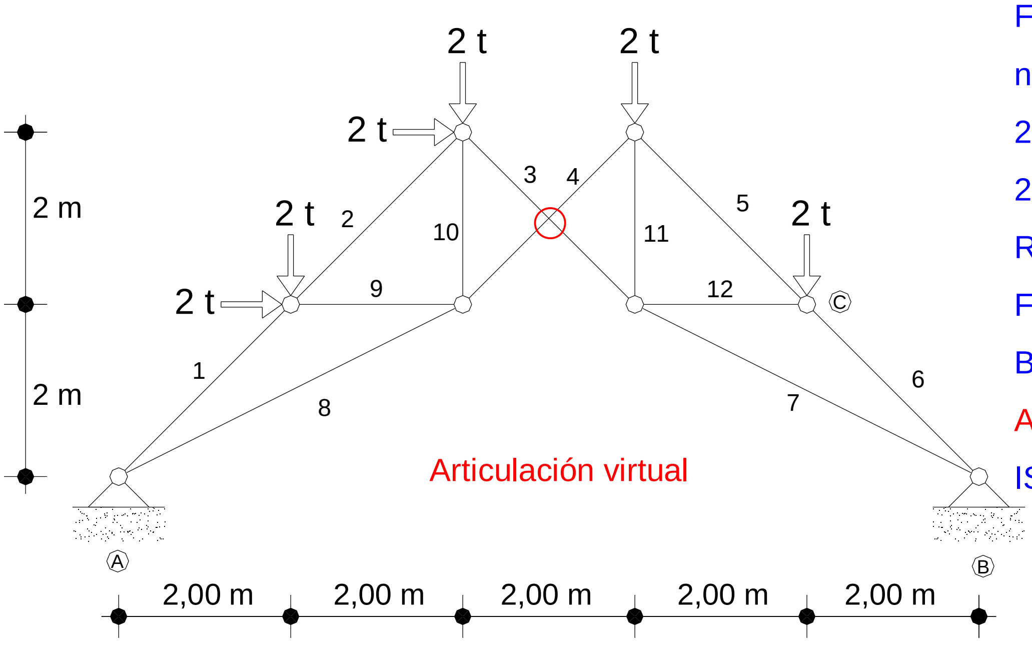
2(8) - 4 =12 → OK

Reticulado incompleto

Forma simple

Base fija

ISOSTÁTICA conjunto.



Final diciembre 2006

n = 8 b= 12 r= 4

2n –r = b

2(8) - 4 =12 → OK

Reticulado incompleto

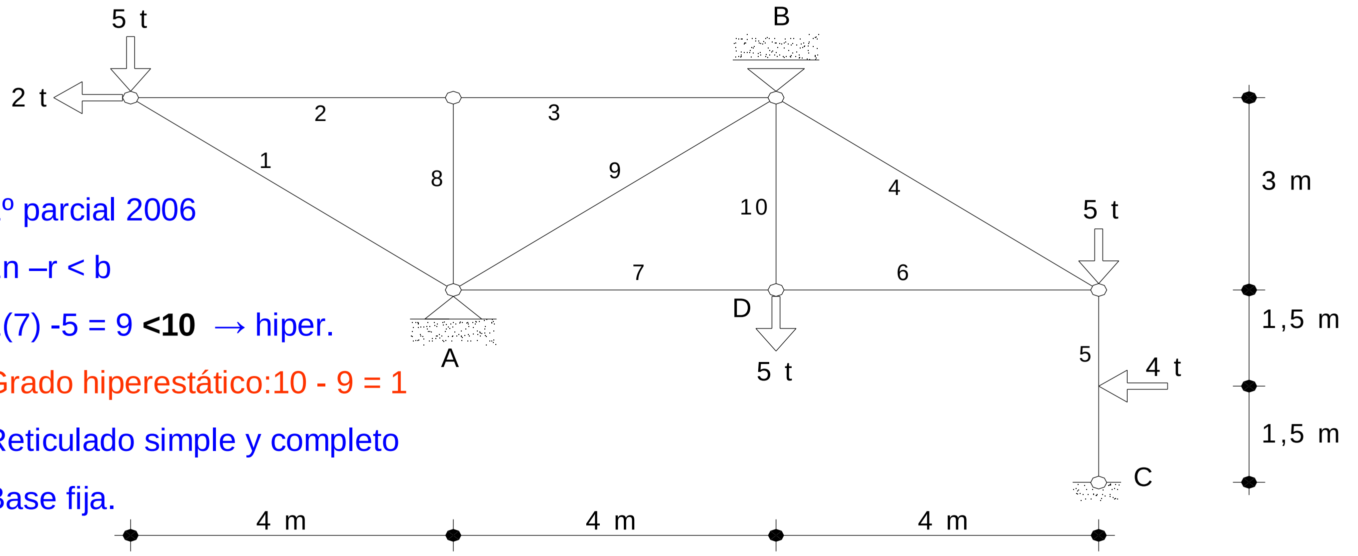
Forma compuesta

Base fija.

Arco de 3 articulaciones

ISOSTÄTICA conjunto.

Ejemplos II Estructuras Articuladas Hiperestáticas



2º parcial 2006

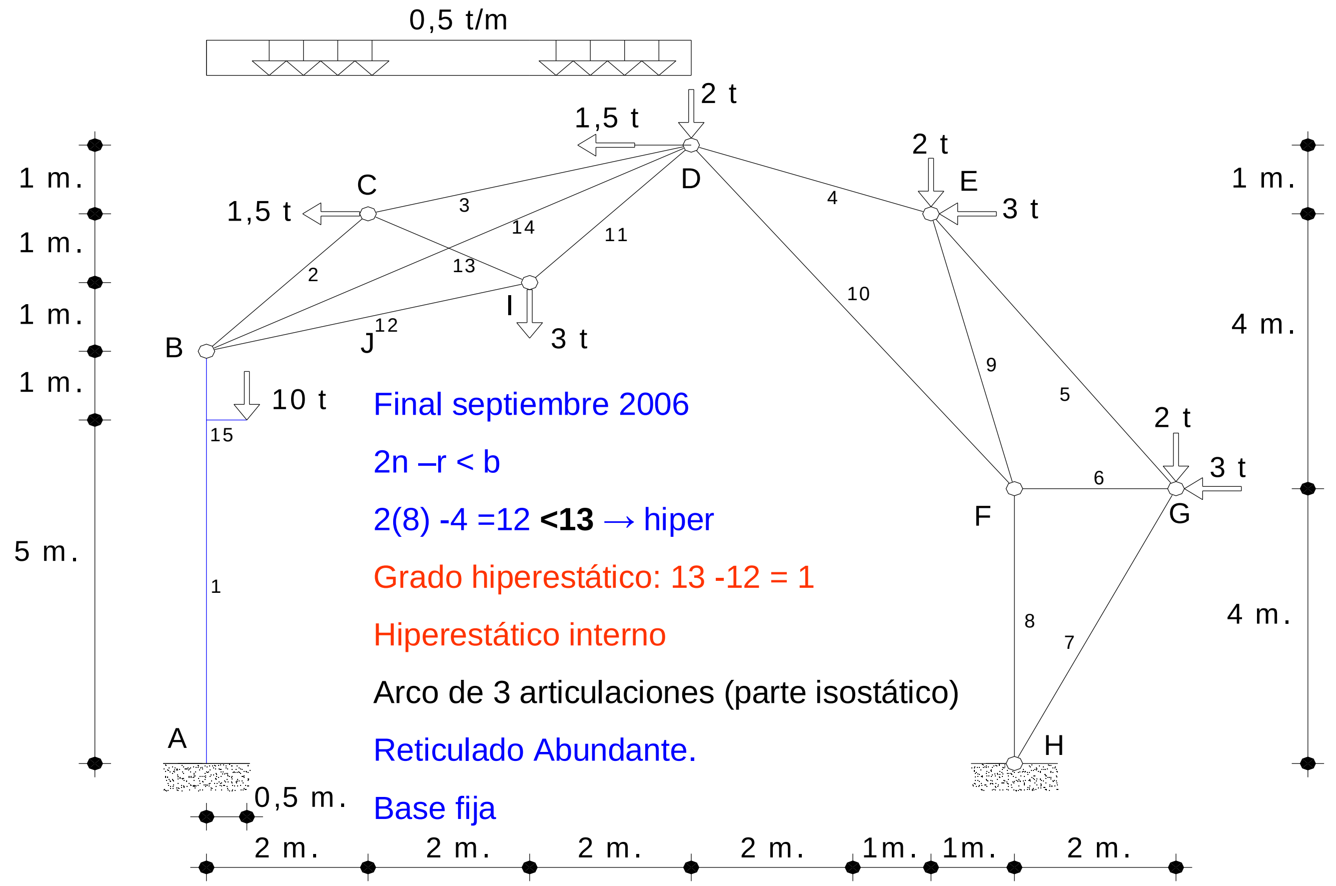
2n –r < b

2(7) -5 = 9 **<10** → hiper.

Grado hiperestático:10 - 9 = 1

Reticulado simple y completo

Base fija.



Final septiembre 2006

2n –r < b

2(8) -4 =12 **<13** → hiper

Grado hiperestático: 13 -12 = 1

Hiperestático interno

Arco de 3 articulaciones (parte isostático)

Reticulado Abundante.

Base fija