CURSO DE
CÁLCULO ESTRUCTURAL

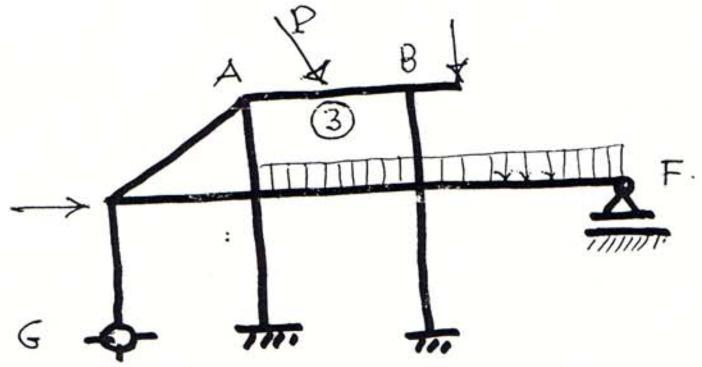
MÉTODO MATRICIAL SIMPLIFICADO

Planteamiento general del problema
El método matricial como solución

AMADEO VÁZQUEZ PRIETO
Arquitecto
Arquitecto Técnico
Profesor de la E.U.A.T.M.

8. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA

Analizar una Estructura Plana de Nudos rígidos consiste en obtener para todas sus barras las **3** reacciones de sustentación en cada extremo.



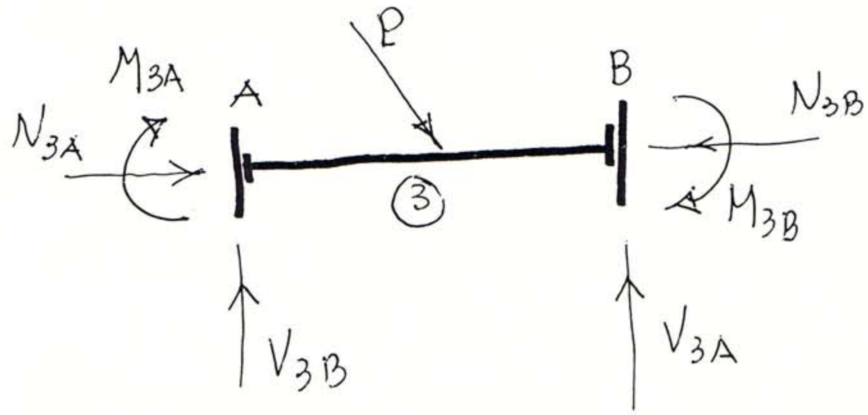


figura 8.1

En la estructura de la figura 8.1 el número total de reacciones desconocidas es de 57 = [6b - (1+2)] puesto que en G sólo hay dos reacciones y en F sólo una. Las ecuaciones de la ESTÁTICA son 3 por barra + 3 por nudo.

b = 10 ; n = 5; g = 57 - 45 = 12

El grado hiperestático es de 12. En general el análisis de una Estructura plana de nudos rígidos conduce a un problema altamente hiperestático.

En realidad el problema se reduce a obtener los Momentos reacción de todos los extremos de barra, porque si conocieramos los M_{il} (Momentos reacción de la barra "i" en el extremo l); equilibrando barras obtendríamos los V_{il}, (cortantes de la barra i en el extremo l); a continuación equilibrando nudos obtendríamos los axiles N_{il}.

Conocidas las **(3)** reacciones de sustentación de todas las barras podríamos representar los diagramas (o funciones) de solicitaciones (S_o), Axil (N_o), V Cortante (V_o) y Flectora (M_o) que son el EFECTO de las Fuerzas Exteriores (Acciones) sobre las reacciones de las distintas barras de la Estructura. Aquí acaba el problema de ANÁLISIS.

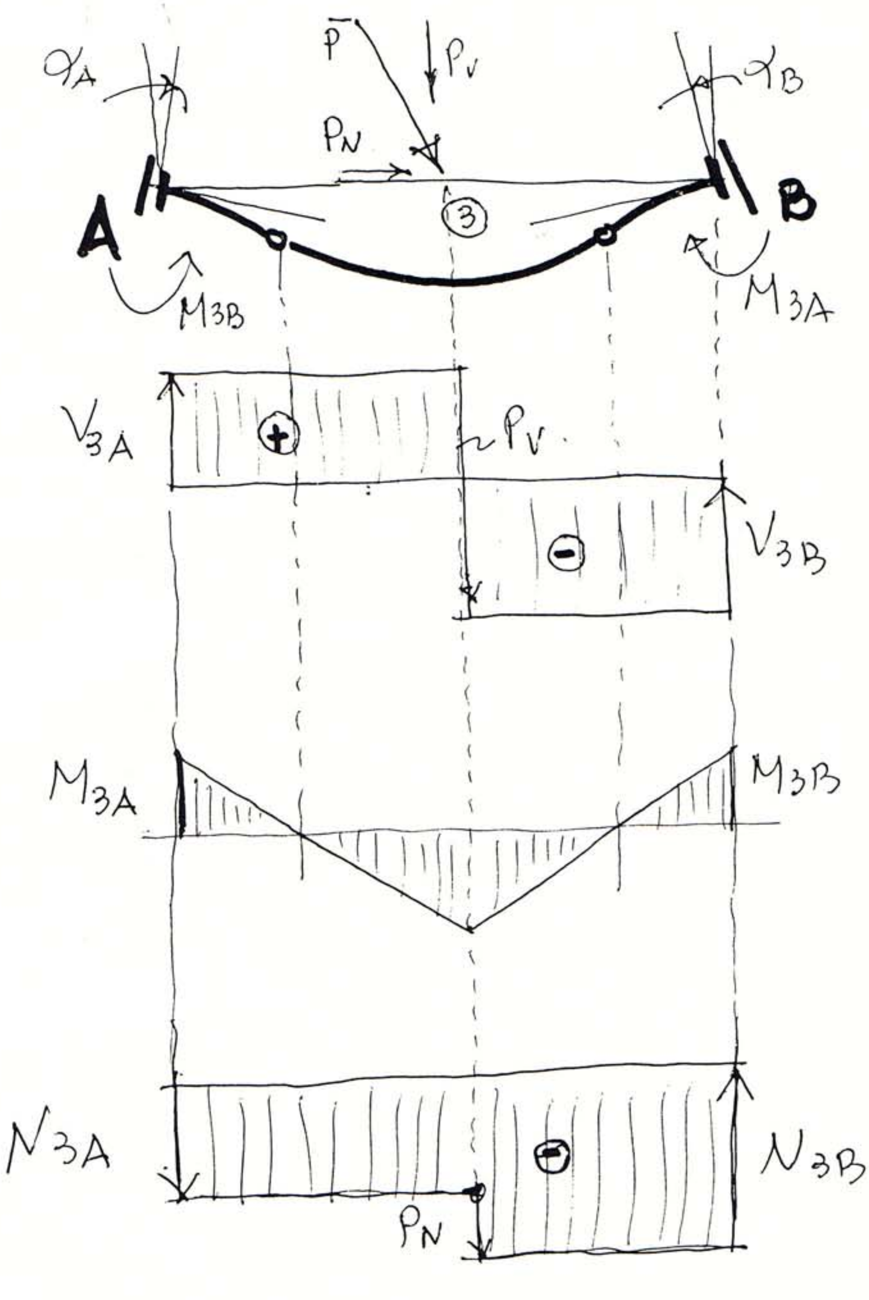


figura 8.2. DIAGRAMA D E SOLICITACIONES

EL PROBLEMA ESTRUCTURAL acaba con el DIMENSIONAMIENTO de SECCIONES (PROBLEMAS DE PROYECTO) o con la COMPROBACIÓN (PROBLEMAS DE PERITACIÓN) del estado tensional de las secciones más fatigadas. En el caso de las Estructuras de Hormigón Armado el dimensionamiento se reduce a obtener las armaduras, puesto que las dimensiones de la reacción se han establecido en el PREDIMENSIONADO, antes del análisis; además hay que comprobar la situación de las secciones o elemento estructural frente a los otros Estados Límites que establece la Instrucción EH-91.
(DEFORMACIÓN, FISURACIÓN, ANCLAJE, PANDEO, ADHERENCIA)

9. EL MÉTODO MATRICIAL COMO SOLUCIÓN

En el MÉTODO MATRICIAL de la RIGIDEZ son incógnitas las deformaciones de la Estructura que se concretan en los GIROS de los NUDOS y los DESPLAZAMIENTOS (en general de los dinteles).

El número de giros es igual al número de nudos: "n".

El número de desplazamientos es igual al número de pisos "d" (en general es el grado de desplazabilidad).

El número de incógnitas es pues n+d.

Las ecuaciones para obtener giros α_I y desplazamientos Δ_i son las ecuaciones de barra **(7)** en las que se expresa el momento reacción en cada extremo en función de las deformaciones (incógnitas) y de las rigideces y fuerzas exteriores (datos). Las condiciones ≡ ecuaciones son el equilibrio de nudos, $\sum M_{il} = 0$ (suma de momentos de los extremos de barras (i) igual a cero) y el equilibrio de dinteles, $\sum H_i = 0$ (suma de acciones horizontales sobre el dintel i, igual a cero). Las ecuaciones se escriben superponiendo efectos, es decir superponiendo distintos estados de deformación que sumados representan el estado general de deformación de la estructura.

Ejemplo:

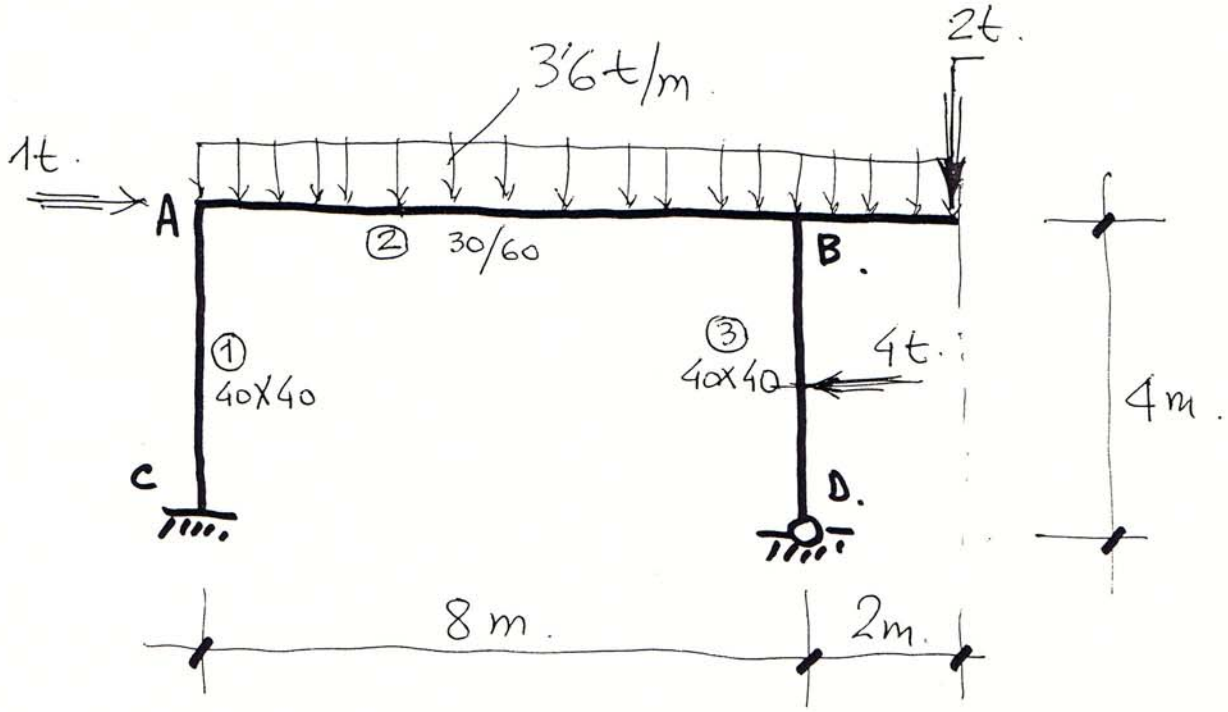


figura 9.1

1º) CÁLCULO DE LAS RIGIDECES DE LAS BARRAS

$$I_0 = \text{inercia de comparacion} = I_1 = I_3 = 213.333\ cm^4$$

$$I_2 = 540.000\ cm^4 = 2{,}531 I_0; \qquad E = 270.000\ \ k\ /m^2$$

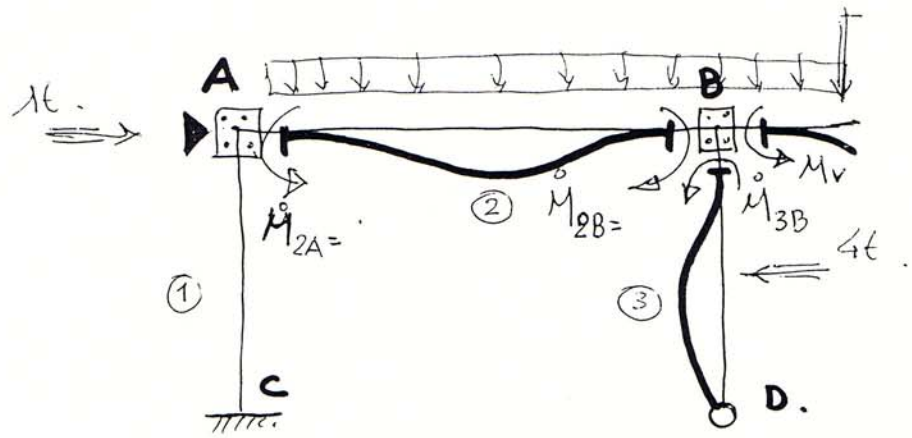
$$K_1 = \frac{4EI_0}{L} = 1(EI_0)\ ;\ EI_0 = 5.760\ \ T/m$$

$$K_2 = \frac{4EI_2}{L} = 1{,}265(EI_0)$$

$$K_3 = \frac{3EI_0}{L} = 0{,}75(EI_0)$$

2º) ANÁLISIS DE LOS ESTADOS DE DEFORMACIÓN

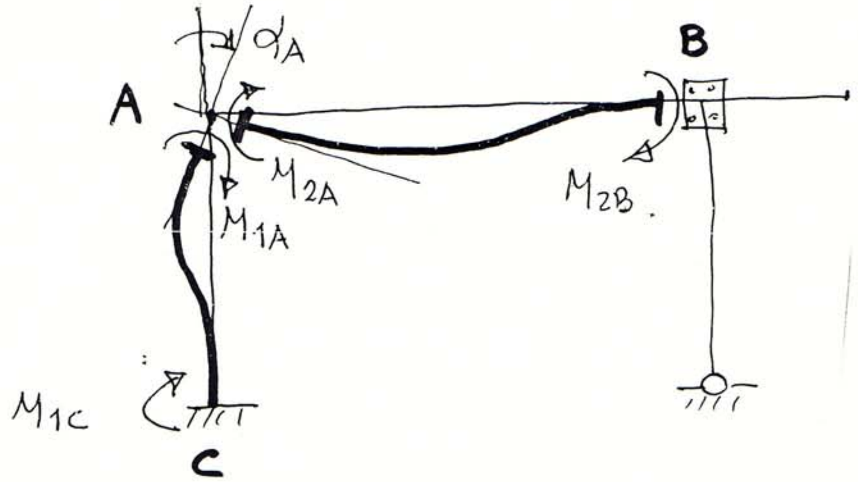
ESTADO "O" LOS NUDOS NO GIRAN
LOS DINTELES NO SE DESPLAZAN



$\mathring{M}_{3B} = -3$ mt ; $\mathring{M}_{2A} = -19{,}2$ mt ; $\mathring{M}_{2B} = +19{,}2$ mt ; $M_v = -11{,}2$ mt

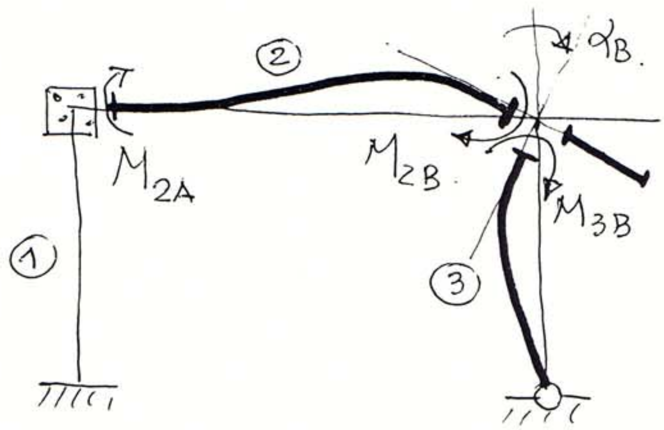
figura 9.2

ESTADO 1.- LOS NUDOS GIRAN



$\overset{1}{M}_{1C} = 0{,}5\ K_1\,\alpha_A$; $\overset{1}{M}_{1A} = K_1\,\alpha_A$; $\overset{1}{M}_{2A} = K_2\,\alpha_A$; $\overset{1}{M}_{2B} = K_2\,\alpha_A\ 0{,}5$

figura 9.3



$M_{2A} = 0{,}5\ K_2\,\alpha_B$; $M_{2B} = K_2\,\alpha_B$; $M_{3B} = K_3\,\alpha_B$

(el voladizo no tiene rigidez)

figura 9.4

ESTADO 2. LOS DINTELES DESPLAZAN (SIN GIRAR LOS NUDOS)

$$M_{1A} = M_{1B} = \frac{1{,}5K_1\Delta}{L_1}$$

$$M_{3D} = \frac{K_3\Delta}{L_3}$$

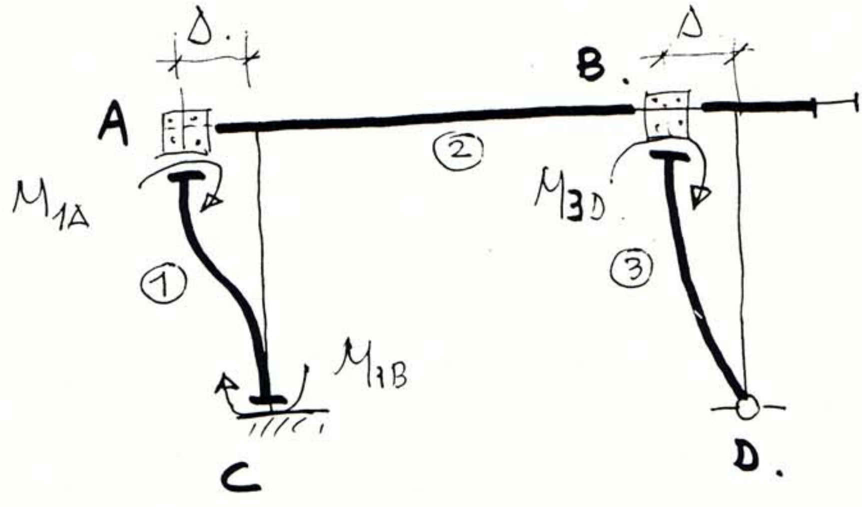


figura 9.5

SUPERPOSICIÓN

(1) $\sum M_A = 0 \quad (K_1 + K_2)\alpha_A + 0{,}5K_2\alpha_B + \frac{1{,}5K_1}{L_1}\Delta = +19{,}2 \text{ mt}$

(2) $\sum M_B = 0 \quad 0{,}5K_2\alpha_A + (K_2 + K_3)\alpha_B + \frac{K_3}{L_3}\Delta = -5 \text{ mt}$

(3) $\sum \xrightarrow[H_1]{} = 0 \quad \frac{1{,}5K_1}{L_1}\alpha_A + \frac{K_3}{L_3}\alpha_B + \left(\frac{3K_1}{L_1^2} + \frac{K_3}{L_3^2}\right)\Delta = +1{,}75 \text{ t}$

Las ecuaciones (1) y (2) no requieren explicación alguna. La ecuación (3) requiere una explicación. Para su escritura se aisla del dintel $\overline{AB}$ (figura 9.1) y se analizan las acciones horizontales sobre él, que han de estar equilibradas.

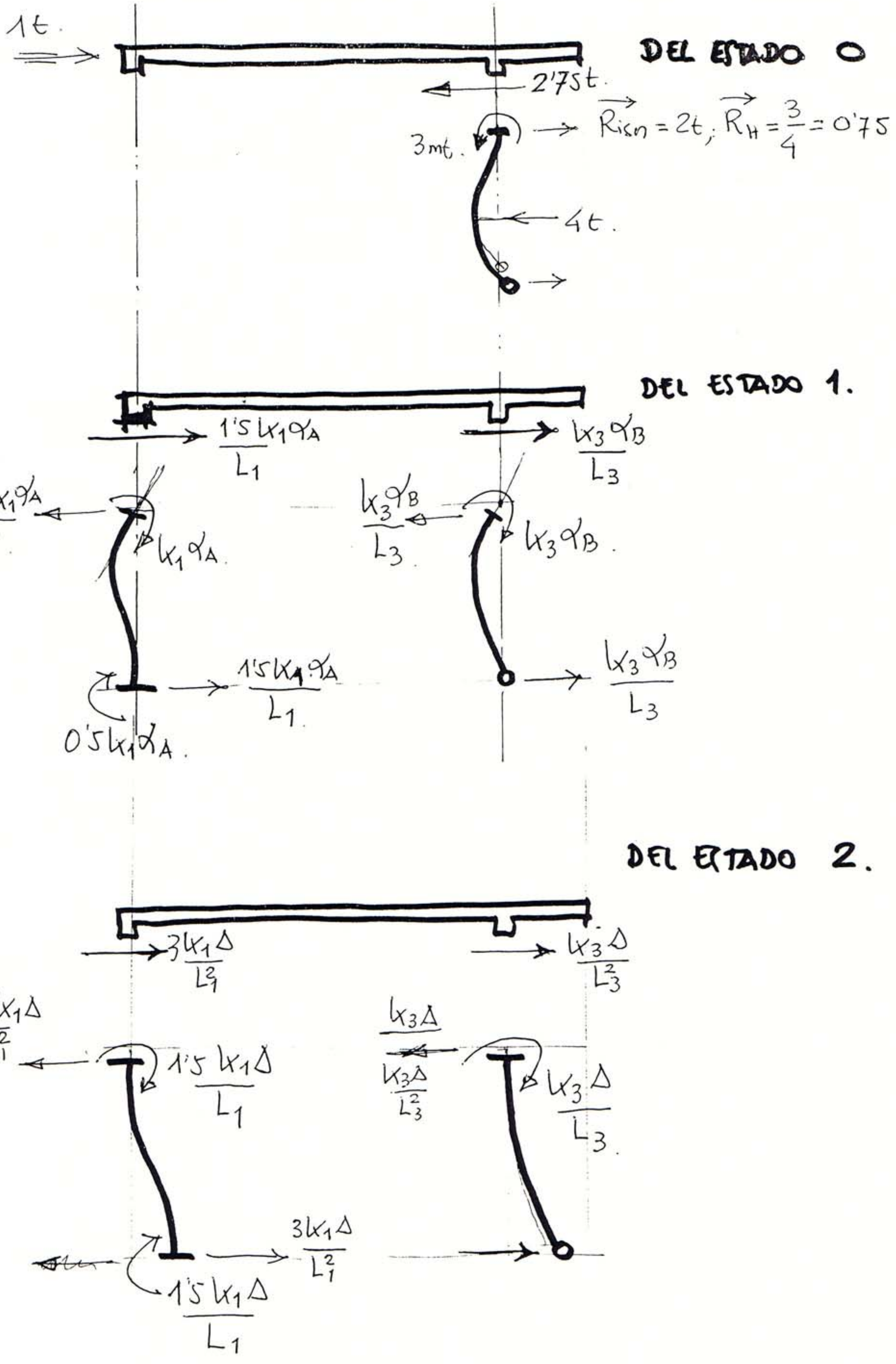

1t
DEL ESTADO 0
2'75t
3mt
$\vec{R}_{isn} = 2t$; $\vec{R}_H = \frac{3}{4} = 0'75$
4t
DEL ESTADO 1.
$\frac{1'5 k_1 \alpha_A}{L_1}$
$\frac{k_3 \alpha_B}{L_3}$
$\frac{1'5 k_1 \alpha_A}{L_1}$
$k_1 \alpha_A$
$\frac{k_3 \alpha_B}{L_3}$
$k_3 \alpha_B$
$\frac{1'5 k_1 \alpha_A}{L_1}$
$\frac{k_3 \alpha_B}{L_3}$
$0'5 k_1 \alpha_A$
DEL ESTADO 2.
$\frac{3 k_1 \Delta}{L_1^2}$
$\frac{k_3 \Delta}{L_3^2}$
$\frac{3 k_1 \Delta}{L_1^2}$
$\frac{1'5 k_1 \Delta}{L_1}$
$\frac{k_3 \Delta}{L_3^2}$
$\frac{k_3 \Delta}{L_3}$
$\frac{3 k_1 \Delta}{L_1^2}$
$\frac{1'5 k_1 \Delta}{L_1}$

figura 9.6

El sistema (1), (2), (3) expresado en forma MATRICIAL

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0{,}5K_2 & \dfrac{1{,}5K_1}{L_1} \\ 0{,}5k_2 & K_2 + K_3 & \dfrac{K_3}{L_3} \\ \dfrac{1{,}5k_1}{L_1} & \dfrac{K_3}{L_3} & \dfrac{3K_1}{L^2{}_1} + \dfrac{K_3}{L^2{}_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_A \\ \alpha_B \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +19{,}2 \\ -5 \\ +1{,}75 \end{bmatrix} \qquad [4]$$

y abreviadamente:

$$[K] \times [\delta] = [F]$$

La MATRIZ $[K]$ es la MATRIZ de RIGIDEZ de la Estructura que resulta en todo caso ser

CUADRADA de orden (n+ d) x (n + d)
SIMÉTRICA
TODOS LOS TÉRMINOS POSITIVOS (salvo excepciones)
NO SINGULAR (determinante no nulo, salvo estructuras inestables ≡ mecanismos)
ORDENADA EN BANDA (lo explicaremos más adelante)

La MATRIZ $[\delta]$ es la matriz de las deformaciones de orden (n + d) x 1.

La MATRIZ $[F]$ es la matriz columna de (n + d) x 1 y la llamamos matriz de FUERZAS; representa el efecto de las fuerzas exteriores, (cambiados de signo).

Sobre nudos y dinteles representados en la figura 9.2 y 9.6, para el estado "O".

En resumen el análisis de una Estructura Plana de Nudos Rígidos se reduce a resolver el sistema $[K] \times [\delta] = [F]$.

Conocidas las deformaciones $[\delta]$, utilizando las ecuaciones de barra **(7)** se obtienen los momentos reacción. A partir de ahí siguiendo el guión del apartado 8 se obtienen las solicitaciones.

Vamos a resolver el ejercicio planteado y luego volveremos sobre la matriz $[K]$, para descubrir su estructura, los significados de cada elemento y en definitiva poderla generar de forma automática, pues en ella reside la clave para el análisis de estructuras.

Para resolver el sistema (1), (2) (3) operamos con valores de las rigideces proporcionales a las reales

$K_1 = 1\ EI_o$; $K_2 = 1.265\ EI_o$; $K_3 = 0,75\ EI_o$,

con lo que el sistema $[4]$ se escribe:

	2.265	0,633	0,375		α_A		19,200
EI_o	0,633	2.015	0,188	x	α_B	=	-5,00
	0,375	0,188	0,223		Δ		+175

y la solución es

$$\alpha_A = \frac{10.931}{EI_0} \qquad \alpha_B = \frac{-5.380}{EI_0} \qquad \Delta = \frac{-5.741}{EI_0}$$

Los signos negativos indican que el giro de B y el desplazamiento son contrarios a los establecidos en el estado1 y 2, es decir, el giro de B es a izquierda y el desplazamiento hacia la derecha.

Con EI_o = 5.760 mT los valores reales de las deformaciones son:

α_A = 0,001898 rad ; α_B = - 0,000934 rad

Δ = - 0,000997 m = 0,997 mm

Para obtener los momentos reacción no es preciso calcular estos valores.

Aplicando las ecuaciones de barra resuelta:

$$M_{1C} = K_1\left(0{,}5\alpha_A + \frac{1{,}5\Delta}{L_1}\right) = 1EI_0\left(0{,}5\frac{10.931}{EI_0} + \frac{1{,}5}{4}\frac{-5.741}{EI_0}\right) = 33$$

$$M_{1A} = K_1\left(\alpha_A + \frac{1{,}5\Delta}{L_1}\right) = +8.778 \text{ mt}$$

$$M_{2A} = 19.200 + K_2(\alpha_A + 0{,}5\alpha_B) = -8.77 \text{ mt}$$

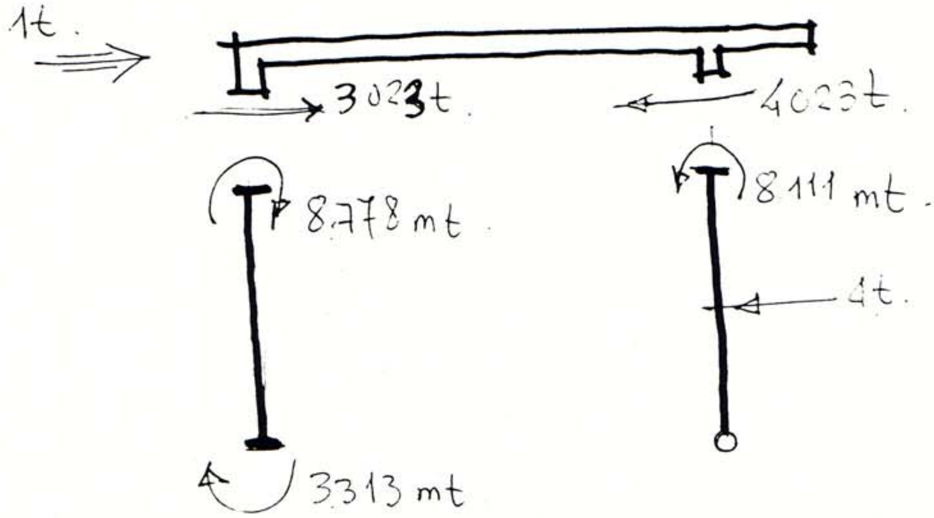
$$M_{2B} = 19.200 + K_2(0{,}5\alpha_A + 0{,}5\alpha_B) = 19.308 \text{ mt}$$

$$M_{3B} = -3 + K_3\left(\alpha_B + \frac{\Delta}{L_3}\right) = -8.111 \text{ mt}$$

$$M_{3D} = 0$$

Debemos comprobar que la suma de momentos en B y en A es cero (salvo errrores operativos).

También se debe comprobar que las acciones horizontales sobre el dintel están equilibradas.



Los diagramas de solicitaciones se representan a continuación.

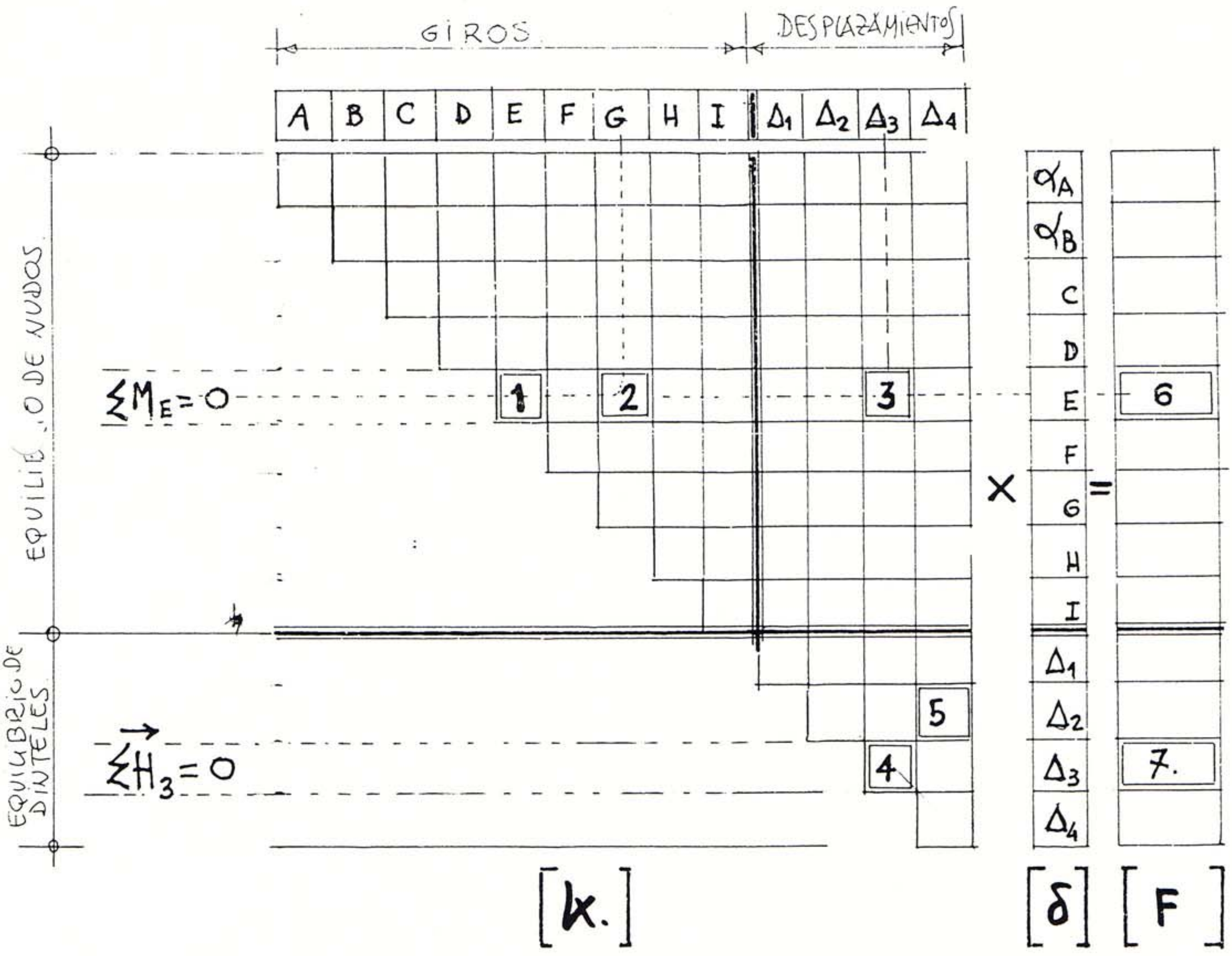
10. LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Hemos visto que el análisis de una E.P.N.R. conduce a un sistema de ecuaciones lineales, que expresado en forma matricial es:

$$[K] \times [\delta] = [F]$$

que resume el equilibrio de nudos y dinteles.

Cada elemento de las matrices representa un sumando del equilibrio, o un elemento de los distintos estados de superposición. Para poder generar mecánicamente las tres matrices vamos a indicar en la figura siguiente el significado de las líneas y de los elementos. Veremos que la estructura de las matrices es lógica y fácil de deducir.



ESTE SISTEMA CORRESPONDERÍA A UNA ESTRUCTURA DE 9 NUDOS Y 4 DESPLAZAMIENTOS.

$\sum \mathbf{M_E = 0}$ LA LÍNEA INDICA QUE LA SUMA DE MOMENTOS EN EL NUDO E, ES CERO.

$\sum \overrightarrow{\mathbf{H_3}} = \mathbf{0}$ ESTA LÍNEA INDICA QUE LA SUMA DE ACCIONES HORIZONTALES SOBRE EL DINTEL 3 ES CERO

$\boxed{1}$ LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL DE LA PRIMERA SUBMATRIZ INDICAN LOS MOMENTOS QUE EN EL NUDO E GENERA EL GIRO UNITARIO DEL PROPIO NUDO E, QUE ES LA SUMA DE LAS RIGIDECES DE LAS BARRAS DEL NUDO E, ES DECIR LA RIGIDEZ DEL NUDO K_E.

$\boxed{2}$ ESTE ELEMENTO REPRESENTA EL MOMENTO QUE EN EL NUDO E GENERA EL GIRO UNITARIO DE G, QUE ES LA MITAD DE LA RIGIDEZ DE LA BARRA QUE UNE E CON G. SI NO EXISTIERA BARRA EL VALOR DE ESTE ELEMENTO ES CERO.

$\boxed{3}$ ESTE ELEMENTO DE LA SEGUNDA SUBMATRIZ REPRESENTA EL MOMENTO QUE EN EL NUDO E GENERA EL DESPLAZAMIENTO DEL DINTEL 3.

$\boxed{4}$ REPRESENTA LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL DE LA TERCERA SUBMATRIZ. INDICA LA ACCIÓN HORIZONTAL QUE EL DESPLAZAMIENTO UNITARIO DEL DINTEL 3, GENERA EN EL EQUILIBRIO DEL DINTEL 3. ES LO QUE HEMOS LLAMADO RIGIDEZ DEL PISO.

$\boxed{5}$ ESTE ELEMENTO INDICA LA ACCIÓN HORIZONTAL QUE EL DESPLAZAMIENTO DEL DINTEL 4 GENERA EN EL EQUILIBRIO DEL DINTEL 2 EN GENERAL ESTOS TÉRMINOS SON NULOS SALVO EXCEPCIONES.

$\boxed{6}$ ESTE ELEMENTO DE LA MATRIZ DE FUERZAS INDICA LA SUMA DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO QUE LAS FUERZAS EXTERIORES GENERAN EN EL NUDO E, CAMBIADOS DE SIGNO SE REPRESENTAN ASÍ

$-\sum \overset{\circ}{M}_E$ Y SE LEE EN EL ESTADO CERO.

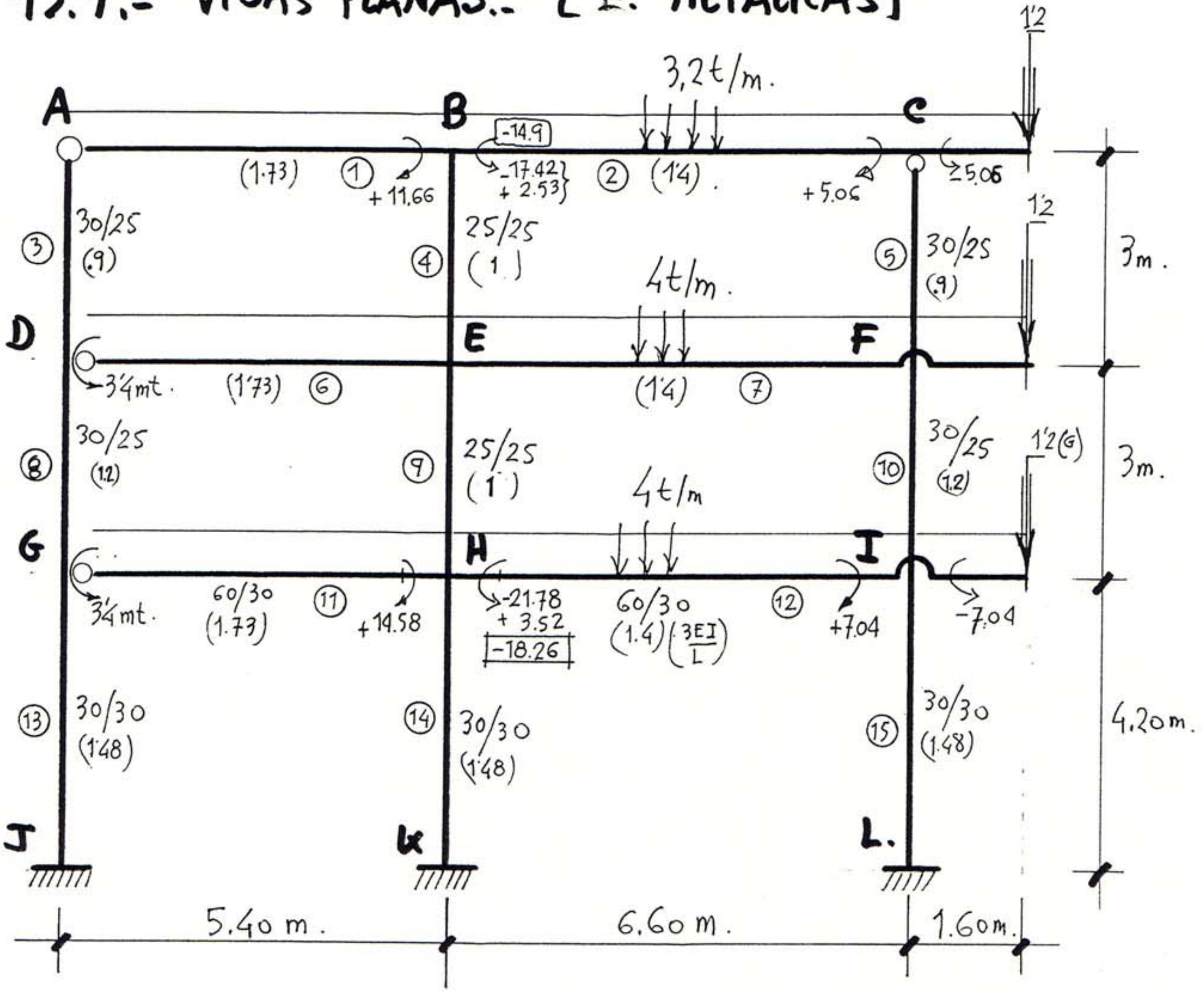
$\boxed{7}$ ESTE ELEMENTO DE LA MATRIZ DE FUERZAS INDICA LA SUMA DE LAS ACCIONES HORIZONTALES QUE LAS FUERZAS EXTERIORES GENERAN EN EL DINTEL 3, CAMBIADAS DE SIGNO. SE REPRESENTA ASÍ

$-\sum \overset{\circ}{H}_3$ Y SE PUEDE LEER EN EL ESTADO CERO.

Además, al resolver los siguientes ejercicios, se puede comprobar que la ocupación de los elementos nulos tiene su ritmo de formación que ayudan a no equivocarse. Más adelante sobre algún ejercicio, comentaremos la propiedad e interés de la ordenación en banda.

13.- EXCEPCIONES.-

13.1.- VIGAS PLANAS.. (E. METÁLICAS)



HORMIGÓN H-250 VIGA PLANA 60/30 $M_L = 0{,}3\, f_{cd} \cdot b\, d^2 = 21.87$ mt. $M_L/\gamma_f = 13.7$ mt.

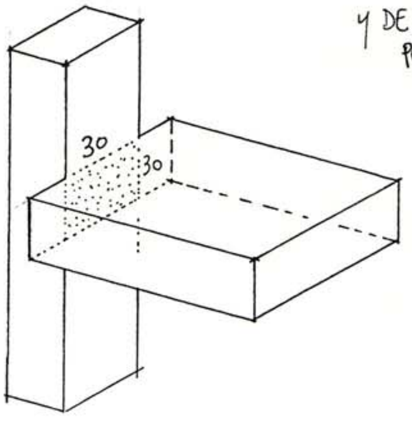
TANTEO BARRA 12 $M_0 = \frac{P \cdot \ell^2}{14} = 12.44 \simeq 13.7$ mt.

* ADVERTENCIA IMPORTANTE PARA LAS CARGAS DEL VOLADIZO, QUE PUEDEN SER DE EFECTO FAVORABLE PARA EL VANO CONTIGUO Y DE CARACTER VARIABLE. Art. 32.a.2

* $n = 7$; $d = 3$. $[K]_{10 \times 10}$

* NUDOS "G" y "D" ESTABLEZCO LA RIGIDEZ DE LA UNIÓN EN (FUNCION DE) LA CAPACIDAD RESISTENTE DE LA SECCION COMÚN VIGA-SOPORTE: $\frac{M_{L_{30/30}}}{\gamma_f = 1'6} = 6{,}8$ mt.; 50% ≃ 3'4.

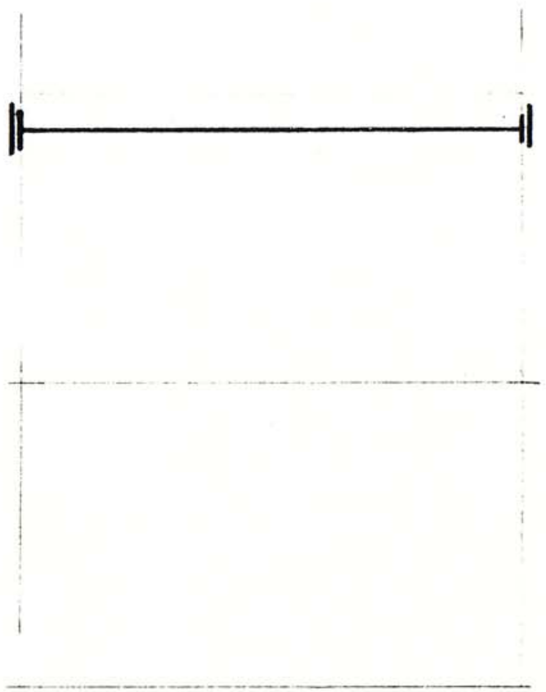
Y DE LA COLABORACION DESEADA POR EL SOPORTE PARA LA VIGA.



* ACCIONES DE CARACTER PERMANENTE 2.8 t/ml (70
" " VARIABLE. 1.2 " ". (30

α_B	D	E	F	G	H	I	Δ_1	Δ_2	Δ_3
4.13	0	0.5	0	0	0	0	0.5	0	0
	2.1	0	0	0.6	0	0	0.3	0.6	0
		5.13	0	0	0.5	0	0.5	0'5	0
			2.1	0	0	0.6	0.3	0.6	0
				2.68	0	0	0	0.6	0.529
					5.61	0	0	0'5	0'529
						2.68	0	0.6	0'529
							0.533	0	0
								1.133	0
									0.755

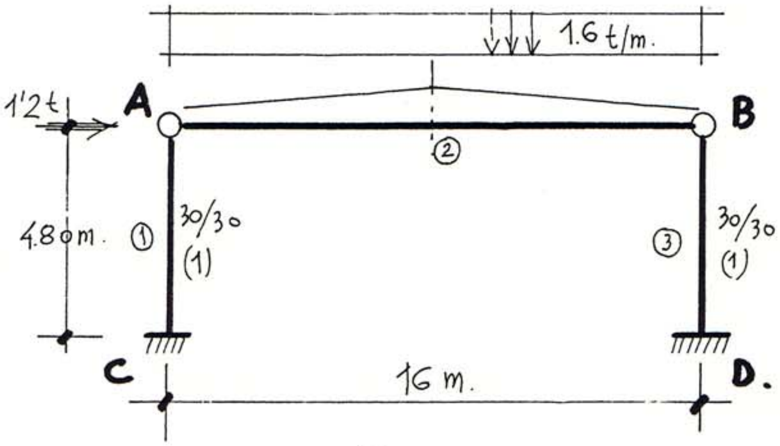
	HIPOT. (I)	HIP. (II)	SOL. (I)	SOL. II.
α_B	+3.24	+3,24		
D	0	+3,40		
E	+3.68	+5,38		
F	0	0,0		
G	0	+3,40		
H	+3.68	+5,38		
I	0	0,0		
Δ_1	0	0,0		
Δ_2	0	0,0		
Δ_3	0	0,0		



ANALISIS BARRA 12. (H·I + H·II)

13.2. ESTRUCTURAS PREFABRICADAS. (E. INDUSTRIAL)

NAVE SIMPLE.



$EI_0 = 1139$ m.T.

H-200.

$$\boxed{\Delta_1}$$

$$\boxed{0.0868} \times \boxed{\Delta_1} = \boxed{-1{,}2.}$$

$\Delta_1 = -\ 13.8249 / EI_0$ (1'21 cms).

$M_{1C} = K_1 \left(\frac{\Delta_1}{L_1}\right) = -2.88$ mt.

$M_{3D} = K_3 \left(\frac{\Delta}{L_3}\right) = -2.88$ mt.

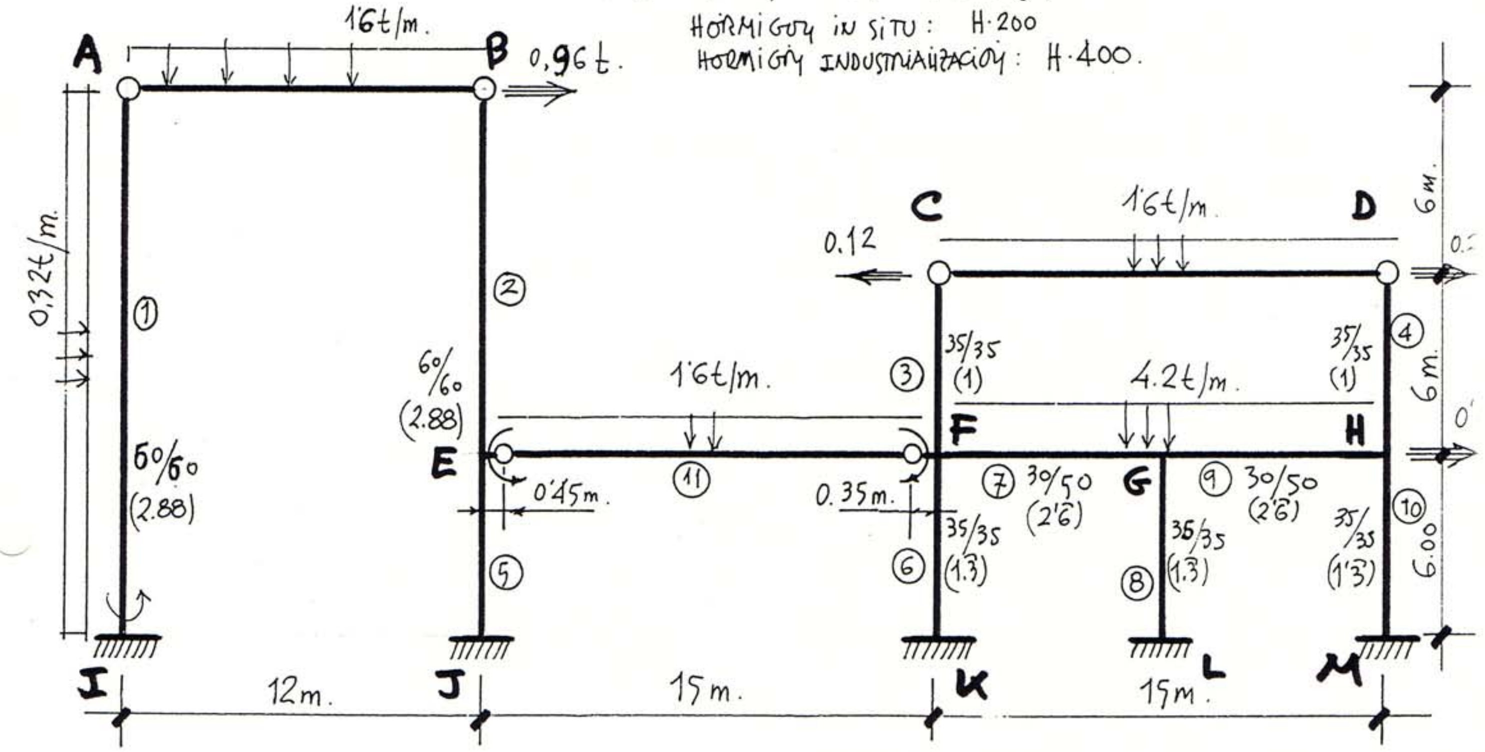
SOPORTE: $N_0 = 12.80$ t. 30x30 (4φ16)

$M_0 = 2.88$ mt.

NAVES MULTIPLES.— (ALTERNAN LA CONSTRUCCION TRADICIONAL "IN SITU" CON LA CONSTRUCCION INDUSTRIALIZADA).

HORMIGON IN SITU: H-200

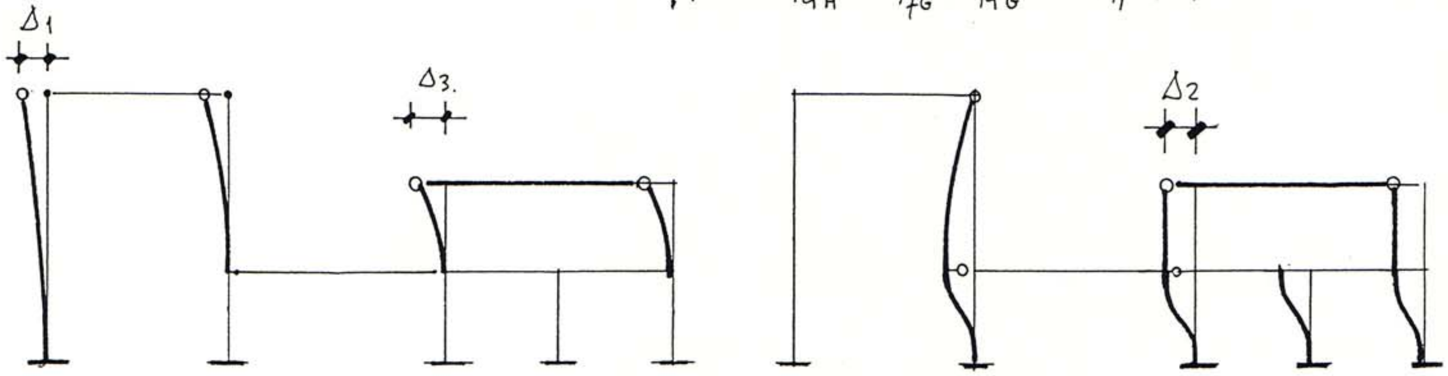
HORMIGON INDUSTRIALIZACION: H-400.

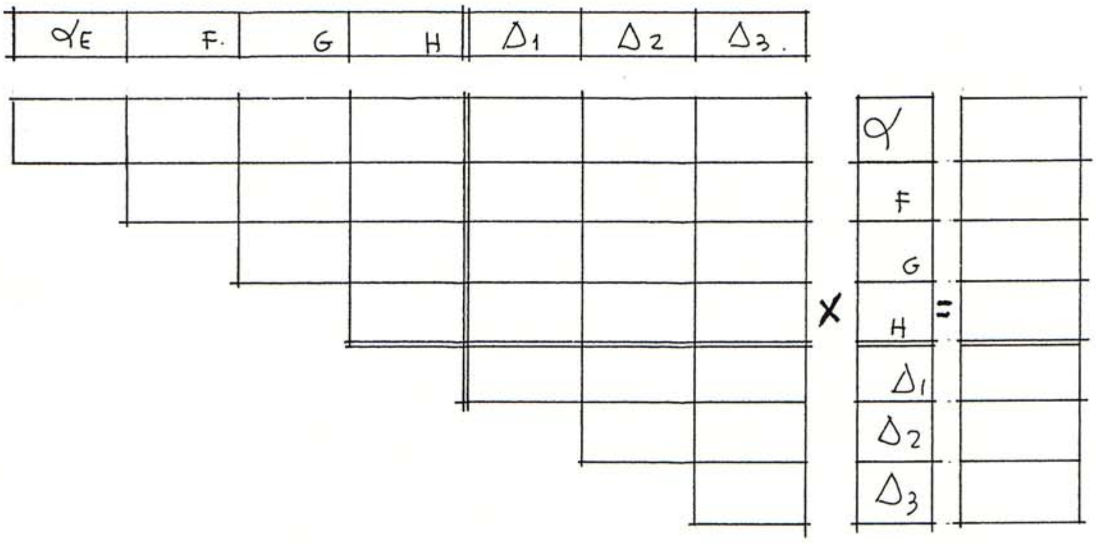


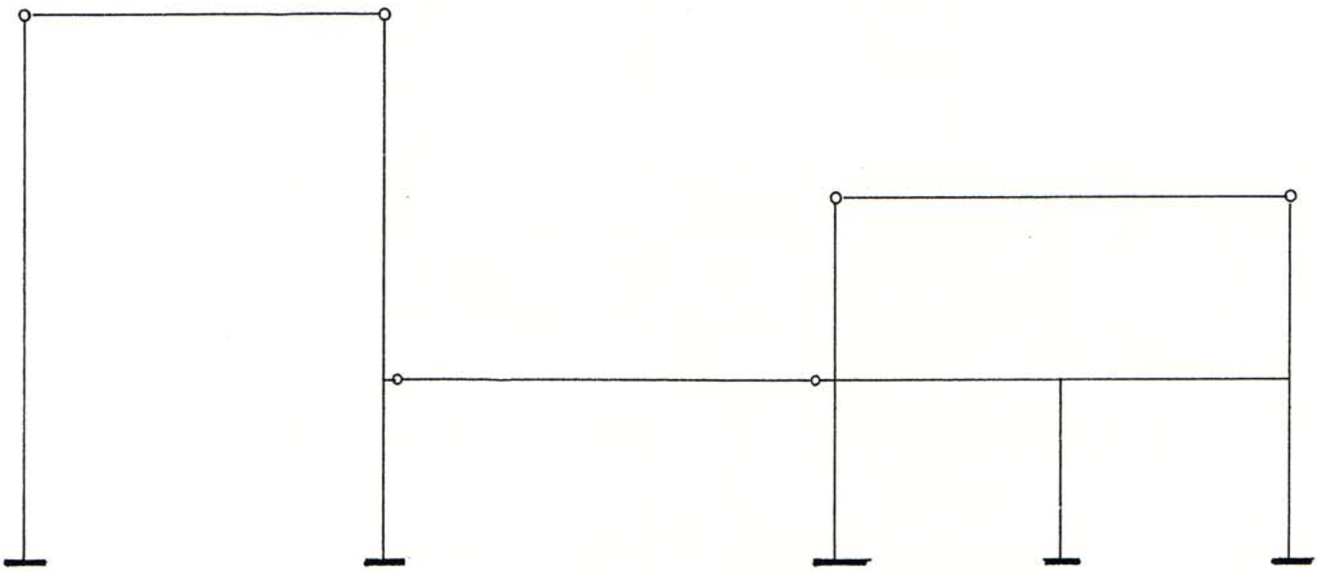
* Nº DE NUDOS: 4. $[K]_{7\times7}$.
Nº DE DINTELES: 3.

$\mathring{M}_{1I} = -12.96$ mt; $\mathring{M}_{11,E} = -5'27$ mt.; $\mathring{M}_{11,F} = +4.07$ mt.

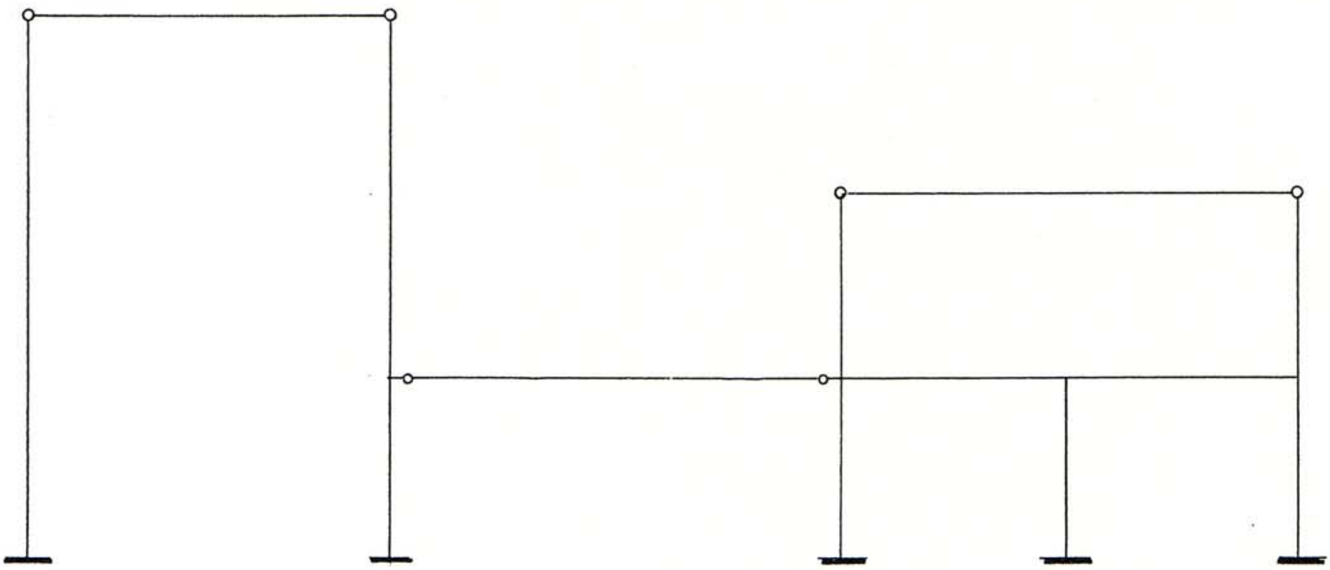
$\mathring{M}_{7F} = -\mathring{M}_{9H} = -\mathring{M}_{7G} = M_{9G} = -\ 19{,}69$ mt.





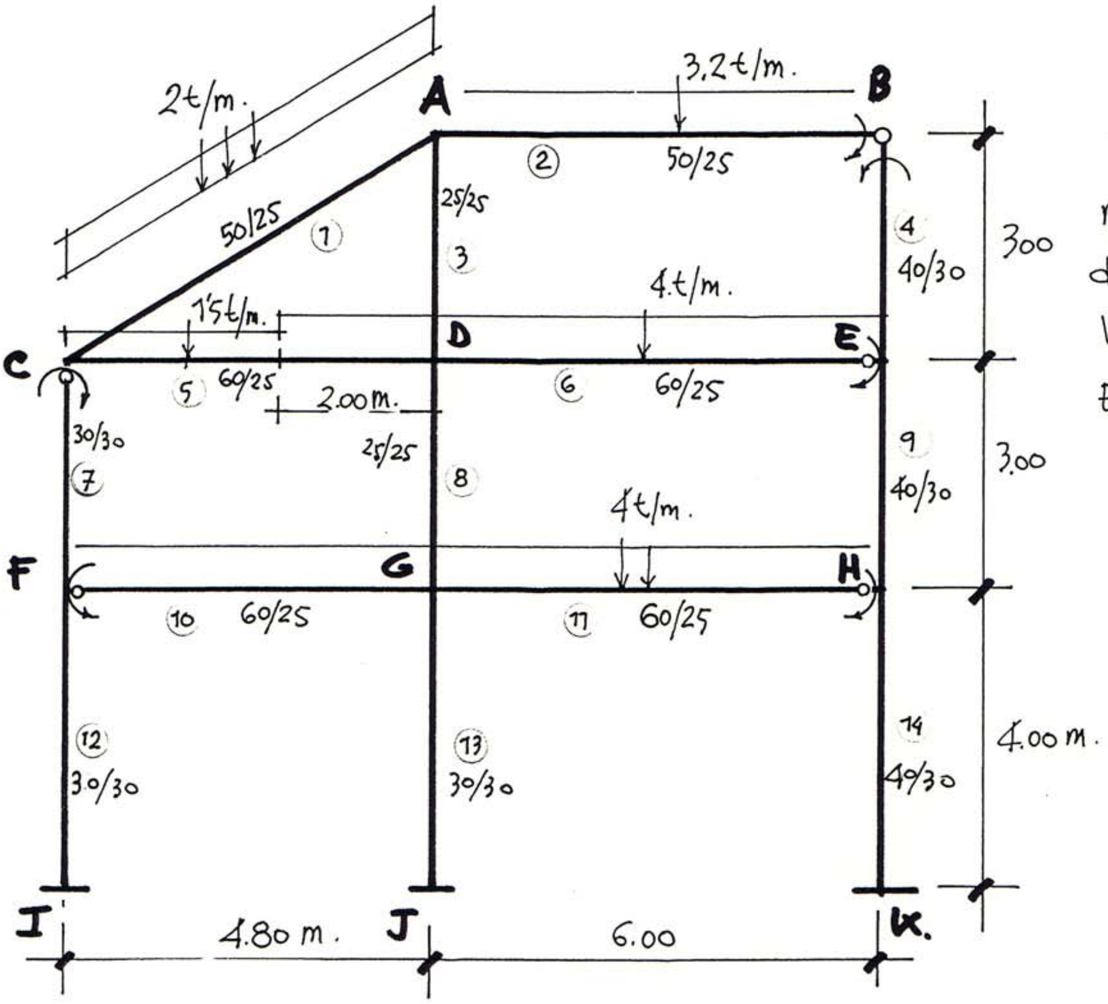


CORTANTES Y AXILES V_0 y N_0



FLECTORES M_0

14.- ESTRUCTURAS CON DINTELES INCLINADOS.-



HORMIGÓN H-225.

$\eta = 7$ $[K]_{9\times9}$

$d = 2$

VIGAS PLANAS.

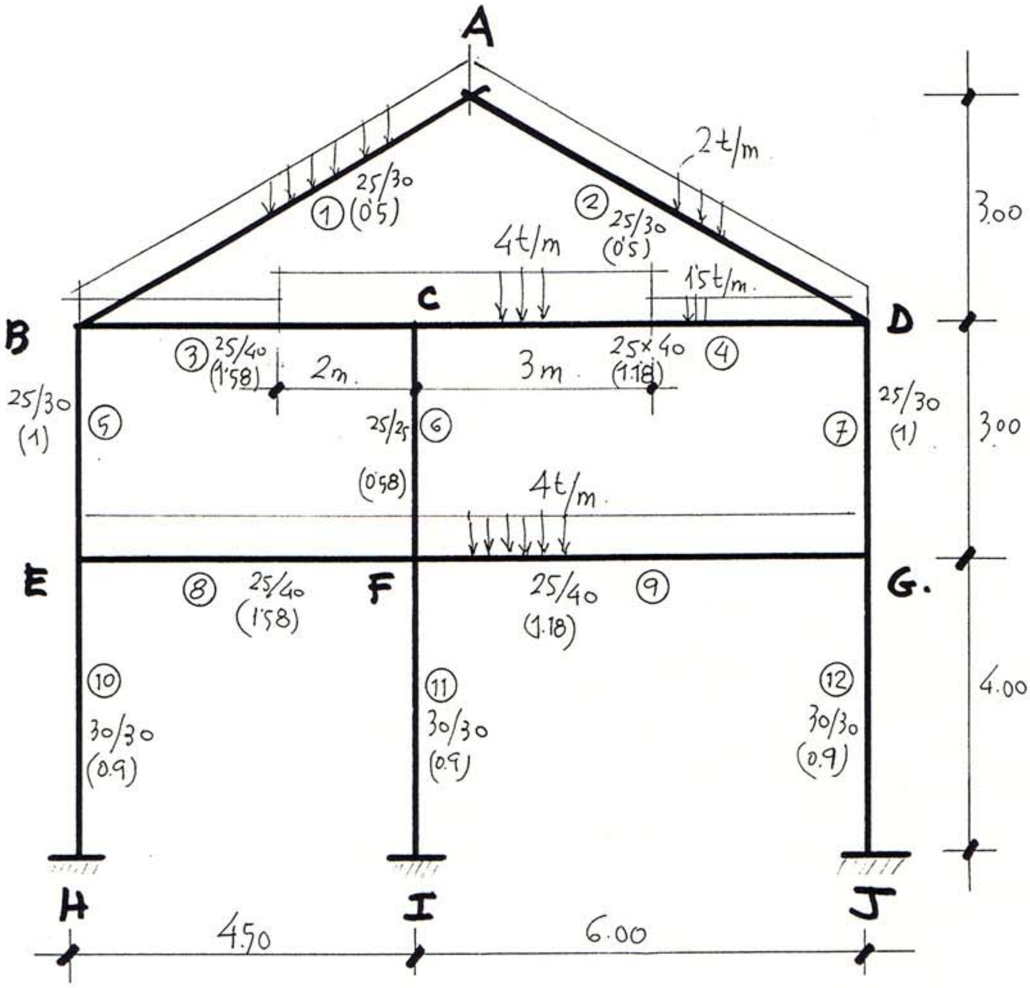
$EI_0 =$

α_A	C	D	E	F	G	H	Δ_1	Δ_2

×

α_A
C
D
E
F
G
H
Δ_1
Δ_2

=



HORMIGON H-175

$EI_0 = 2.025$ mt.

$n = 7$ $[K]_{9\times 9}$

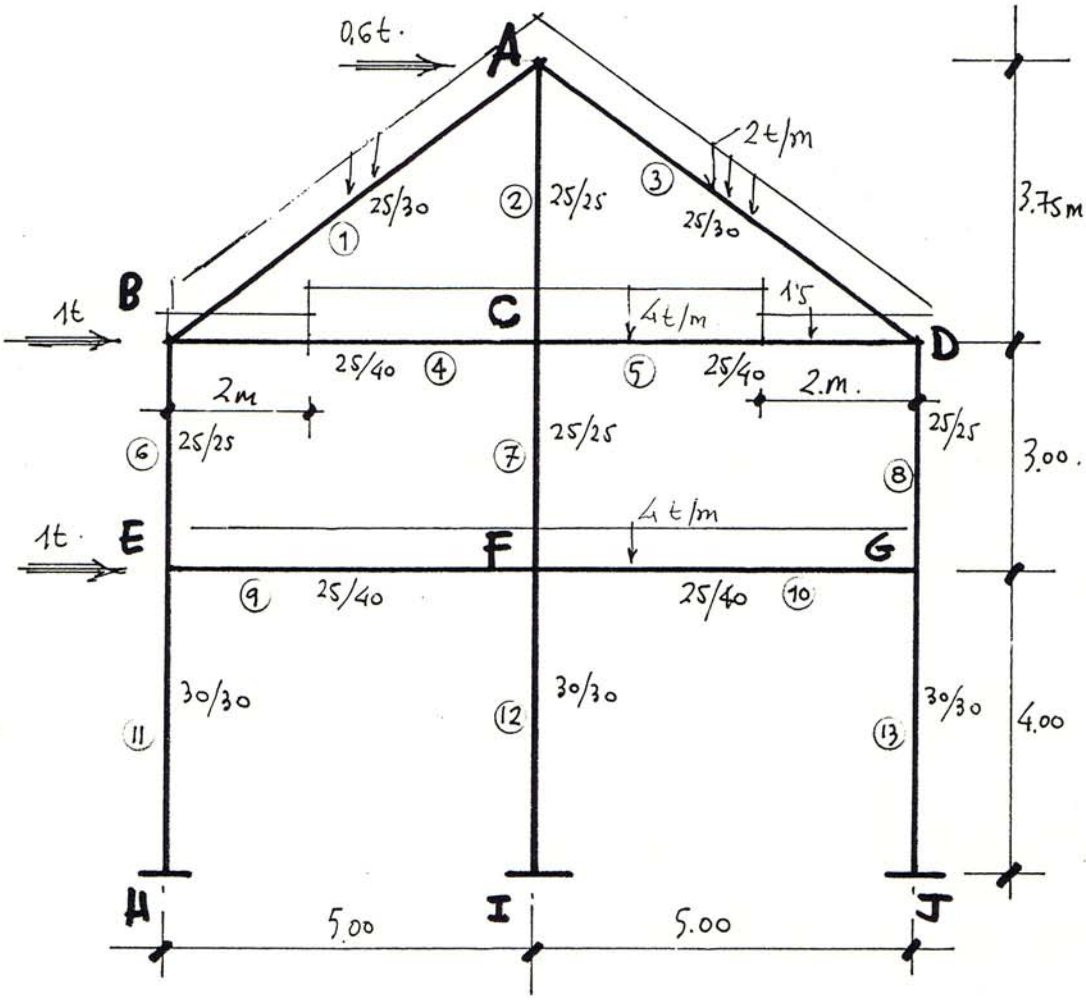
$d = 2$

α_A	B	C	D	E	F	G	Δ_1	Δ_2

×

α_A
B
C
D
E
F
G
Δ_1
Δ_2

=



Hormigón H·175

$EI_0 =$

$\eta = 7$

$d = 2.$

φ_A	B	C	D	E	F	G	Δ_1	Δ_2				
										φ_A		
										B		
										C		
										D		
									×	E	=	
										F		
										G		
										Δ_1		
										Δ_2		

NAVE MULTIPLE. DIENTE DE SIERRA.

HORMIGON H: 400 (PREFABRICACION)

$EI_0 = 1300$ Tm.